

MED 5 Relation and Functions

1. กำหนดให้ A, B เป็นเซตซึ่ง $n(A) = 5$ และ $n(B) = 4$ และ $n(A \cup B) = 7$
เซตในข้อใดต่อไปนี้มีจำนวนสมาชิกมากที่สุด (Quota KKU' 56)

$$n(B-A) = n(B) - n(A \cap B) = 4 - 2 = 2$$

$$1. (P(A-B)) \times (A \cap B)$$

$$2. (P(A \cap B)) \times (A-B)$$

$$3. B \times (A \cap B)$$

$$4. (P(B-A)) \times A$$

$$1) n(P(A-B)) \cdot n(A \cap B)$$

$$= 2^{n(A-B)} \cdot 2$$

$$= 2^3 \cdot 2 = 16$$

$$2) n(P(A \cap B)) \cdot n(A-B)$$

$$= 2^2 \cdot 3 = 12$$

$$3) n(B) \cdot n(A \cap B)$$

$$= 4 \cdot 2 = 8$$

$$4) n(P(B-A)) \cdot n(A)$$

$$= 2^2 \cdot 5 = 20$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$7 = 5 + 4 - x$$

$$x = 2$$

$$n(A-B) = n(A) - n(A \cap B) = 5 - 2 = 3$$

2. กำหนดให้ $r = \left\{ (x, y) \in I \times I \mid y = \frac{2x^2 - 8}{x^2 + 1} \right\}$ เมื่อ I แทนเซตของจำนวนเต็ม

จำนวนสมาชิกของเซต $D_r - R_r$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 Oct' 55)

1. 2

2. 4

3. 5

4. 7

$$y = \frac{2x^2 + 2 - 8 - 2}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{2(x^2 + 1) - 10}{x^2 + 1}$$

$$= 2 - \frac{10}{x^2 + 1}$$

$$(x^2 + 1) \mid 10 \text{ จึงทำให้ } y \in I$$

ดังนั้น $x^2 + 1 = 1, 2, 5, 10$ or $x^2 + 1 = -1, -2, -5, -10$
 $x^2 = 0, 1, 4, 9$ or $x^2 = -2, -3, -6, -11$
 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ or $\emptyset$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $y = -8, -3, 0, 1$

$$D_r = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\} \quad R_r = \{-8, -3, 0, 1\}$$

$$\therefore n(D_r - R_r) = 4$$

3. กำหนดความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid |x| + |y| \leq 1\}$$

$$r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 \leq y^2\}$$

ข้อใดไม่ถูกต้อง (Quota CMU' 56)

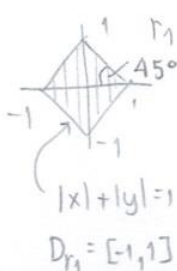
1. $r_1 \cap r_2$ เป็นเซตของจุดทั้งหลายบนกราฟที่มีพื้นที่ 4 ตารางหน่วย X

2. ทั้งสองความสัมพันธ์ไม่เป็นฟังก์ชัน ✓

3. $R_{r_1 \cap r_2} = R_{r_1}$ ✓

4. $D_{r_1 \cap r_2} = D_{r_2}$ X

$$[-1, 1]$$

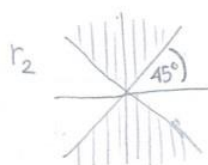


$$|x| + |y| = 1$$

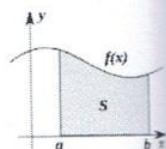
$$D_{r_1} = [-1, 1]$$

$$x^2 = y^2$$

$$x = y \text{ or } x = -y$$



$$D_{r_2} = \mathbb{R}$$



4. กำหนดให้ $r_1 = \{(x, y) \mid |x-2| \leq 1\}$ และ $r_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{-x^2+2x}\}$

บริเวณของ $r_1 \cap r_2$ บนระนาบ xy มีพื้นที่เท่าใด (PSU Quota'56)

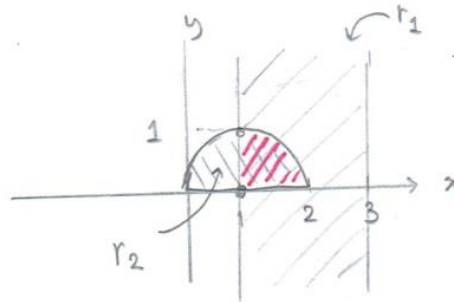
1. $\frac{\pi}{4}$ ตารางหน่วย

2. $\frac{\pi}{2}$ ตารางหน่วย

3. $\frac{3\pi}{4}$ ตารางหน่วย

4. π ตารางหน่วย

5. 2π ตารางหน่วย



$r_1: -1 \leq x-2 \leq 1$

$1 \leq x \leq 3$

$r_2: y = \sqrt{-x^2+2x}$

$y^2 = -x^2+2x, y \geq 0$

$x^2+y^2-2x=0$

$(h, k) = (1, 0)$

$r = \sqrt{1^2+0^2-0} = 1$

$r_1 \cap r_2 \rightarrow \text{Area} = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi}{4}$ #

5. ฟังก์ชันในข้อใดเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $\rightarrow y$ 1 ค่า $\rightarrow x$ 1 ค่า

$\rightarrow$ ลากเส้นนอน ตัดกราฟ

1. $f(x) = \sqrt{(x+1)^2}$

2. $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$

3. $f(x) = (x-1)^3 - 4$

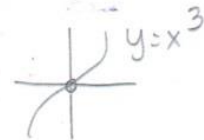
4. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

1) $f(x) = |x+1|$



2)

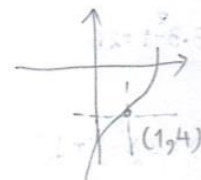
✓ 3)



shift

$x=1$

$y=-4$



4) $y=0$: $x=1, 2, 3$

6. กำหนดให้ $h(x) = \frac{1}{\sin \sqrt{x+3}}$

ฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(x)$ ในข้อใดที่ทำให้ $h(x) = fog(x)$

1. $f(x) = x+3$ และ $g(x) = \frac{1}{\sin \sqrt{x}}$

2. $f(x) = \frac{1}{\sin \sqrt{x}}$ และ $g(x) = x+3$

3. $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ และ $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

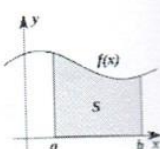
4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ และ $g(x) = \frac{1}{\sin x}$

$f(g(x)) = \frac{1}{\sin \sqrt{x}} + 3$ — (1)

$= \frac{1}{\sin \sqrt{x+3}}$ — (2)

$= \frac{1}{\sin(\frac{1}{\sqrt{x+3}})}$ — (3)

$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin x} + 3}}$ — (4)



$$D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}$$

7. ฟังก์ชัน $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ในข้อใดเป็นฟังก์ชันทั่วถึง (PSU Quota '57)

1. $f(x) = 6^{(x-1)(x-2)(x-3)}$

2. $f(x) = \sin[(x-1)(x-2)(x-3)]$

3. $f(x) = \arctan[(x-1)(x-2)(x-3)]$

4. $f(x) = |(x-1)(x-2)(x-3)|$

5. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)(x-3)}$

1)

2)

3)

4) $y > 0$

8. ถ้า $f(x) = \frac{1}{x}$ และ $g(x) = 2f(x)$ แล้ว $gof(3) + fog^{-1}(3)$ มีค่าเท่าใด

▶ แปล

$$f(x) = 3x^2 - 1$$

$$f(3) = 3 \cdot 3^2 - 1 = 26$$

▶ โหด

$$f(x-2) = 3x^2 - x + 1$$

$$f(x) = 3(x+2)^2 - (x+2) + 1$$

$$g(x) = \frac{2}{x} \rightarrow x = g^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$จ: ได้ \quad g(f(3)) + f(g^{-1}(3))$$

$$= g\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= 6 + \frac{3}{2} = 7.5 \quad \#$$

9. ถ้า $f(x) = \sqrt[3]{x}$ และ $g(x) = \frac{x}{1+x}$ แล้ว $(f^{-1} + g^{-1})(2)$ มีค่าเท่าใด

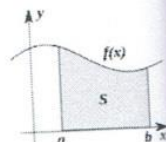
$$x = f^{-1}(\sqrt[3]{x}) \quad x = g^{-1}\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

$$(f^{-1} + g^{-1})(2) = f^{-1}(2) + g^{-1}(2)$$

$$= 8 + (-2)$$

$$= 6 \quad \#$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x} &= 2 \\ x &= 2 + 2x \\ x &= -2 \end{aligned}$$



operation : การดำเนินการตามนิยาม

$$a * b = b - a + 3$$

$$\begin{matrix} + & - & \times & \div \\ \hline & & & \end{matrix}$$

basic

10. กำหนดให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง

บทนิยาม ให้ $f: R \rightarrow R$ และ $g: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันใดๆ

กำหนดการดำเนินการ $\otimes$ ของ f และ g ดังนี้

$$(f \otimes g)(x) = f(g(x)) - g(f(x))$$

สำหรับทุกจำนวนจริง x

ถ้า $f(x) = x^2 - 1$ และ $g(x) = 2x + 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x แล้ว $(f \otimes g)(1)$ เท่ากับเท่าใด

$$(f \otimes g)(1) = f(g(1)) - g(f(1))$$

$$= f(3) - g(0)$$

$$= 8 - 1 = 7 \quad \#$$

11. ฟังก์ชัน f ในข้อใดสอดคล้องกับเงื่อนไข $D_f = D_{f \circ f}$ (PSU Quota'57)

1. $f(x) = \ln x$

X 1)

$$D_f: x > 0$$

$$D_{f \circ f}$$

$$(f \circ f)(x) = \ln(\ln x)$$

$$x > 0 \text{ and } \ln x > 0$$

$$x > 1$$

2. $f(x) = x - \frac{1}{x}$

X 2)

$$x \neq 0$$

$$(f \circ f)(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{x^2 - 1}{x} - \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$x \neq 0 \text{ and } x^2 - 1 \neq 0$$

$$x \neq \pm 1$$

3. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

✓ 3)

$$x \neq 0$$

$$(f \circ f)(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)} = \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$x \neq 0$$

4. $f(x) = x + \frac{1}{1-x}$

X 5)

$$x \geq 1$$

$$(f \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x-1}-1}$$

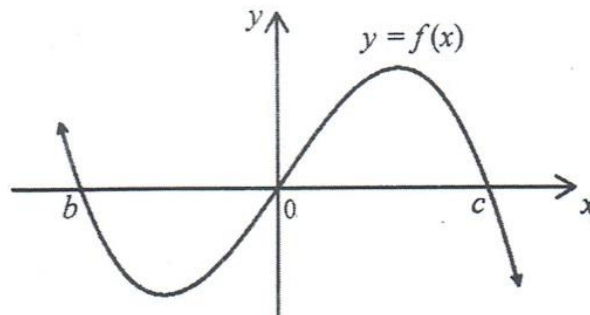
$$x \geq 1 \text{ and } \sqrt{x-1}-1 \geq 0$$

$$x-1 \geq 1$$

$$x \geq 2$$

5. $f(x) = \sqrt{x-1}$

12. ให้ $f(x) = ax^3 + a^2x^2 + x$ โดยที่กราฟของ $y = f(x)$ เป็นดังรูป



ถ้า $x-1$ ทหาร $f(x)$ เหลือเศษ 91 แล้ว $(b-c)^2$ มีค่าเท่าใด

$$f(1) = 91$$

$$(a+10)(a-9) = 0$$

$$a + a^2 + 1 = 91$$

$$a = -10, 9$$

$$a^2 + a - 90 = 0$$

method 1

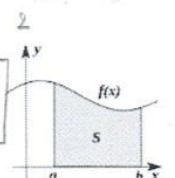
$$0 = -10x^3 + 100x^2 + x$$

$$x(-10x^2 + 100x + 1) = 0$$

$$x = \frac{100 \pm \sqrt{10000 + 40}}{20}$$

$$(b-c)^2 = \left(\frac{100 + \sqrt{10040}}{20}\right) - \left(\frac{100 - \sqrt{10040}}{20}\right)$$

$$= \frac{10040}{100} = 100.4 \quad \#$$



13. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ สำหรับฟังก์ชัน f, g ใดๆ ซึ่ง $R_g \subset D_f$

ก. ถ้า $f \circ g$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ข. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว $f \circ g$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (Quota KKU' 56)

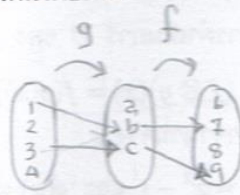
1. ก. ถูก และ ข. ถูก

2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก

4. ก. ผิด และ ข. ผิด

$$D_{f \circ g} = D_f$$



14. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ให้ $f: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $g: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน

โดยที่ $g(x) = 2f(x) + 5$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

$$f(x) = \frac{g(x) - 5}{2}$$

ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่ $(f \circ g^{-1})(1+a) = (g \circ f^{-1})(1+a)$ แล้วค่าของ a^2 เท่ากับเท่าใด

(คณิต PAT 1 : Nov' 57)

$$f(g^{-1}(1+a)) = g(f^{-1}(1+a))$$

$$\frac{g(g^{-1}(1+a)) - 5}{2} = 2f(f^{-1}(1+a)) + 5$$

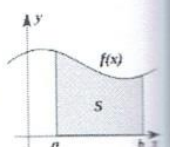
$$1+a-5 = 4(1+a)+10$$

$$a-4 = 4a+14$$

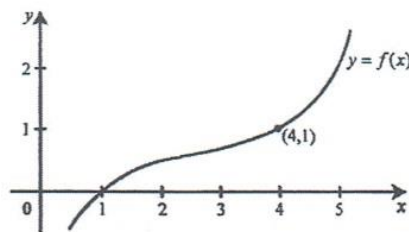
$$3a = -18$$

$$a = -6$$

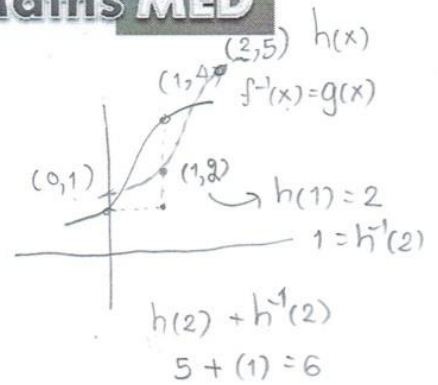
$$\therefore a^2 = 36 \quad \#$$



15. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นดังรูป



วาดกราฟง่าย



ให้ g เป็นฟังก์ชันผกผันของ f ถ้ากราฟของฟังก์ชัน h เกิดจากการเลื่อนกราฟของ g ไปทางขวา 1 หน่วย และเลื่อนขึ้นไปข้างบนอีก 1 หน่วย แล้ว $h(2) + h^{-1}(2)$ มีค่าเท่าใด (PSU Quota'56)

1. 3
2. 4
3. 5
- ✓ 4. 6
5. 7

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

$$h(x) = g(x-1) + 1$$

$$= f^{-1}(x-1) + 1$$

$$h(2) = f^{-1}(1) + 1 = 4 + 1 = 5 \quad *$$

$$x = h^{-1}(f^{-1}(x-1) + 1)$$

$$f^{-1}(x-1) = 1$$

$$x-1 = f(1)$$

$$x-1 = 0$$

$$x = 1$$

$$\therefore h(2) + h^{-1}(2) = 5 + 1 = 6$$

16. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง R โดยที่

$$f(x+5) = x^3 - x^2 + 2x$$

$$f(x) = (x-5)^3 - (x-5)^2 + 2(x-5)$$

สำหรับทุกจำนวนจริง x

$$\text{และ} \quad g^{-1}(2x-1) = x+4$$

สำหรับทุกจำนวนจริง x

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

$$g(x+4) = 2x-1 \rightarrow g(x) = 2(x-4)-1 = 2x-9$$

-151 ✗ (ก) $(f-g)(0) < -169$ ✗

$x = -2$ (ข) $\{x \in I \mid (g \circ f)(x) + 5 = 0\}$ เป็นเซตว่าง ✗

$x = 6$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นคำตอบ (PAT 1 Oct' 55)

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

✓ 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

$$(ก) \quad f(0) = (-5)^3 - (-5)^2 + 2(-5) = -125 - 25 - 10 = -160$$

$$g(0) = 2(-4) - 1 = -9$$

$$\therefore (f-g)(0) = -160 - (-9) = -151 < -169 \quad ✗$$

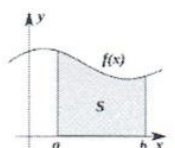
$$(ข) \quad (g \circ f)(x) + 5 = 0$$

$$g(f(x)) = -5$$

แทนค่า $f(x)$ เหนือ y

$$f(x) = g^{-1}(-5) = -2 + 4 = 2$$

แทน $x = 6$ (เดา)



17. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามซึ่ง $P(1) = 1$ และ $P(-1) = 2$ ถ้า $Q(x)$ และ $R(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามซึ่ง $P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + R(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และ $R(x)$ มีดีกรีน้อยกว่า 2 จงหาค่า $R(0)$
(Quota KKU' 56)

Assume $R(x) = ax + b$

$$P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$$

$$x = 1; \quad 1 = 0 + a + b \rightarrow a + b = 1 \quad \text{--- ①}$$

$$x = -1; \quad 2 = 0 - a + b \rightarrow -a + b = 2 \quad \text{--- ②}$$

$$b = \frac{3}{2}, \quad a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore R(0) = b = \frac{3}{2} = 1.5 \quad \#$$

18. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง

โดยที่ $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 4}{x + 1}$ เมื่อ $x \neq -1$

แล้วเรนจ์ของฟังก์ชัน f เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้

(คณิต PAT 1 : Dec' 56)

1. $\{x \in R \mid x^2 + 6x - 7 \geq 0\}$

2. $\{x \in R \mid x^2 + 3x - 10 \geq 0\}$

3. $\{x \in R \mid x^2 + x - 12 \geq 0\}$

4. $\{x \in R \mid x^2 - 6x - 16 \geq 0\}$

$$y \cdot x + y = 2x^2 + 4x + 4$$

$$O = ax^2 + bx + c$$

$$0 = 2x^2 + (4 - y)x + (4 - y)$$

$$x = \frac{-(4 - y) \pm \sqrt{(4 - y)^2 - 4(2)(4 - y)}}{2(2)}$$

$$(4 - y)^2 - 8(4 - y) \geq 0$$

$$(4 - y)(4 - y - 8) \geq 0$$

$$(y - 4)(y + 4) \geq 0$$

$$\begin{array}{c} 4 \quad - \quad - \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ -4 \quad 4 \end{array}$$

1) $(x + 7)(x - 1) \geq 0 \quad \times$

2) $(x + 5)(x - 2) \geq 0 \quad \times$

3) $(x - 4)(x + 3) \geq 0 \quad \checkmark$

