# Chapter Two Dimensional Motion

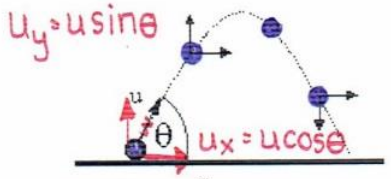
## รูปแบบและหลักการคำนวณการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ (Projectile)

### ① รูปแบบของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ 2-D

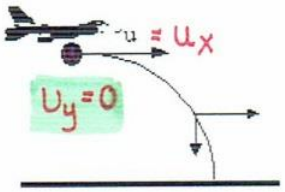
การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ (การเคลื่อนที่วิถีโค้งรูปพาราโบลา) :

ถ้าพิจารณา แนวราบ → วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ ($\bar{a} = 0$)

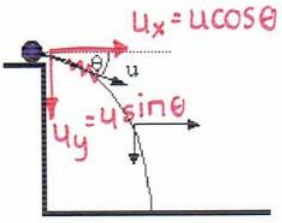
แนวดิ่ง → วัตถุจะเคลื่อนที่อย่างอิสระภายใต้แรงโน้มถ่วงโลก ($\bar{a} = \bar{g}$) มี 3 รูปแบบดังต่อไปนี้




(a) ขว้างเฉียงขึ้น (รูปแบบอย่างง่าย)



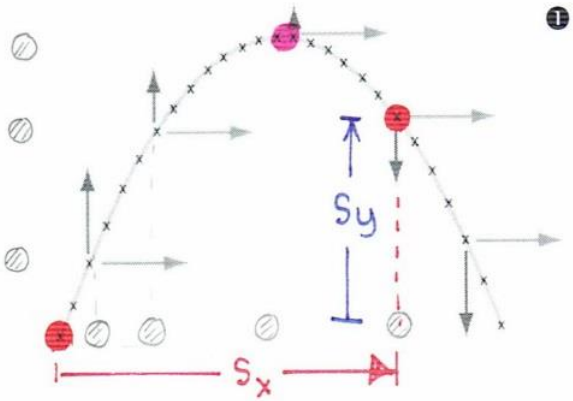

(b) ขว้างแนวราบ




(c) ขว้างเฉียงลง

### ② หลักการคำนวณการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ทุกรูปแบบ

พิจารณารูปแบบการเคลื่อนที่อย่างง่ายมีหลักการเข้าสมการคำนวณดังต่อไปนี้




❶ พิจารณาการเคลื่อนที่ของเงาแยกแกน

x : v คงที่ใช้สูตร $\boxed{s_x = u_x t}$ ; $\bar{a} = 0$ .....(1)

y : มีความเร่ง g ใช้ 4 สูตรหากิน

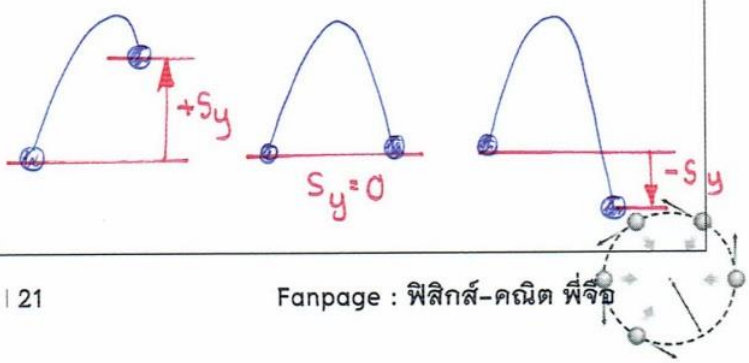
ช่วยหา t

$$v_y = u_y + gt \quad ; \quad s_y = u_y t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$s_y = \left(\frac{u_y + v_y}{2}\right)t \quad ; \quad v_y^{\,2} = u_y^{\,2} + 2gs_y \quad \text{.....(2)}$$

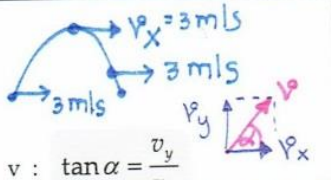
นิยมใช้คำนวณจาก start → Max

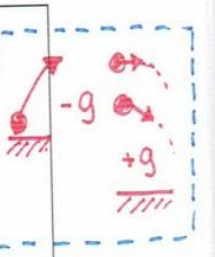
❷ ต้องเข้าใจว่าการเคลื่อนที่แนวราบและแนวดิ่ง $\boxed{t_x = t_y}$ เพราะการเคลื่อนที่เกิดขึ้นพร้อมๆกันเพียงแต่คิดแยกแกนกัน

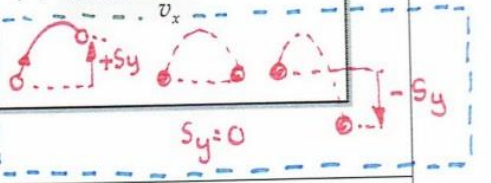


*TIP & TRICK*

1. ณ. ตำแหน่งสูงสุด $v \neq 0$ เนื่องจากมี $v_x$ แต่ $v_y = 0$
2. ทุกๆ ตำแหน่งของการเคลื่อนที่จะมี $v_x = u_x$ เสมอ
3. ความเร็ว ณ ตำแหน่งใดๆ : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ทิศทาง v : $\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$
4. การขว้างวัตถุในแนวราบ $u_x = u$ แต่ $u_y = 0$




**Ex 1** วัตถุถูกยิงด้วยความเร็วต้น 25 m/s ในทิศทำมุม 37 กับแนวดิ่งจงหา

1.1 เวลาในการเคลื่อนที่ในอากาศทั้งหมด

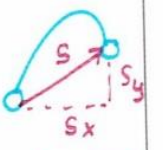
1.2 ระยะสูงสุดที่วัตถุนี้สมารถเคลื่อนที่ได้

1.3 ระยะไกลสุดที่วัตถุนี้สามารถเคลื่อนที่ไปได้

1.4 ความเร็วของวัตถุที่วินาทีที่ 2

↳ สัพพี

1.5 การกระจัดของวัตถุที่วินาทีที่ 3




$u_y = 25\cos 37^\circ = 20$ m/s

$u = 25$ m/s, $37^\circ$

$u_x = 25\sin 37^\circ = 15$ m/s

1.1) $y: s_y = u_y t + \frac{1}{2}gt^2$

$0 = 20t - 5t^2$

$t = 4$ s #

1.2) $y: v_y^2 = u_y^2 + 2gs_y$

$0 = 20^2 - 20s_y$

$s_y = 20$ m #

1.3) $x: s_x = u_x t$

$= 15(4)$

$= 60$ m #

1.4) $t = 2$ s

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$= 15$ m/s #

1.5) $s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$

$s_x = u_x t$ $s_y = u_y t + \frac{1}{2}gt^2$

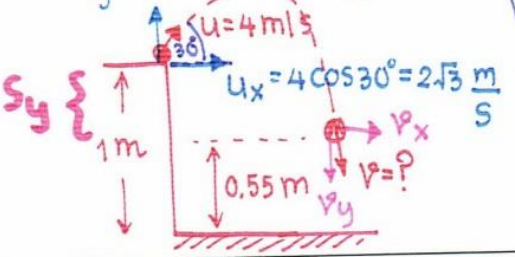
$= 15(3)$ $= 20(3) - 5(3)^2$

$= 45$ m $= 15$ m

$s = 15\sqrt{10}$ m #

**Ex 2** ลูกปิงปองทำมุมเงย 30 องศา กับแนวระดับจากขอบโต๊ะซึ่งสูง 1 เมตร ด้วยอัตราเร็ว 4 เมตรต่อวินาที จงหา อัตราเร็วของลูกปิงปองขณะที่อยู่สูงจากพื้น 0.55 เมตร

$u_y = 4\sin 30^\circ = 2$ m/s




$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$v_y^2 = u_y^2 + 2gs_y$

$= 2^2 + 2(-10)(0.45) = 13$

$v_y = \sqrt{13}$ m/s

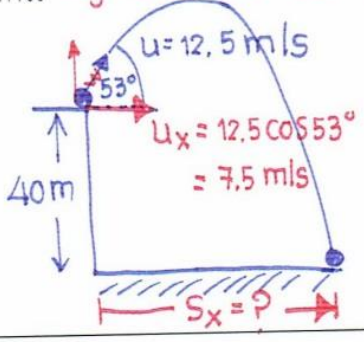
$v_x = u_x = 2\sqrt{3}$ m/s

$\therefore v = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{13})^2} = \sqrt{25} = 5$ m/s #

**Ex 3** เมื่อปาก้อนหินจากหน้าผาสูง 40 เมตร ทำมุมเงย 53 กับแนวราบด้วยความเร็วต้น 12.5 เมตร/วินาที จงหาว่าก้อนหินตกถึงพื้นห่างจากเชิงผาเท่าไร

1. 15 เมตร
2. 20 เมตร
3. 30 เมตร
4. 40 เมตร

$u_y = 12.5\sin 53^\circ = 10$ m/s




$y: s_y = u_y t + \frac{1}{2}gt^2$

$-40 = 10t - 5t^2$

$t^2 - 2t - 8 = 0$

$(t-4)(t+2) = 0$

$t = 4, -2$

$x: s_x = u_x t$

$s_x = 7.5(4)$

$s_x = 30$ m #

**Ex 4** ข้อความต่อไปนี้เกี่ยวกับการเคลื่อนที่วิถีโค้ง

ก. แรงที่กระทำต่อวัตถุแต่ละตำแหน่งของการเคลื่อนที่ขนานกันเสมอ ✓

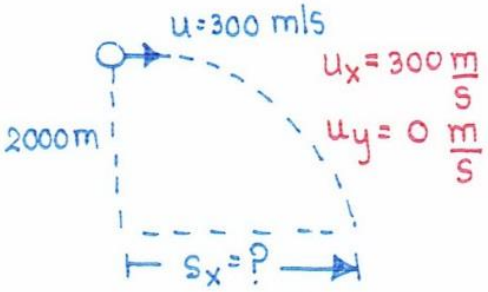
ข. แรงที่กระทำต่อวัตถุ จะตั้งฉากกับความเร็วของวัตถุเสมอ ✗

ค. ณ ตำแหน่งสูงสุดของการเคลื่อนที่วัตถุจะมีพลังงานศักย์โน้มถ่วงเพียงอย่างเดียว ✗ มีพลังงานจลน์ด้วย

ข้อใดถูกต้อง ได้แก่

1. ข้อ ก. และ ข.
2. ข้อ ก. และ ค.
3. ข้อ ข. และ ค.
4. คำตอบเป็นอย่างอื่น

**Ex 5** ลูกระเบิดถูกปล่อยออกมาจากเครื่องบิน ซึ่งบินอยู่ในแนวระดับด้วยอัตราเร็ว 300 เมตรต่อวินาที และอยู่สูงจากพื้นดิน 2000 เมตร จงหาว่าลูกระเบิดจะตกถึงพื้นดิน ณ ตำแหน่งที่ห่างจากจุดทิ้งระเบิดตามแนวระดับกี่เมตร




y: $s_y = u_y t + \frac{1}{2}gt^2$

$2000 = 0 + 5t^2$

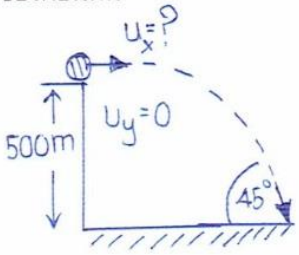
$t = 20$ s

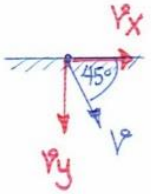
x: $s_x = u_x t$

$\therefore\ s_x = 300(20) = 6{,}000$ m #

**Ex 6** โยนหินก้อนหนึ่งออกไปในแนวระดับ จากหน้าผาสูง 500 เมตร ก้อนหินตกกระทบพื้นดินทำมุม 45 องศา กับพื้นจงหาความเร็วต้นในแนวระดับของก้อนหิน

1. 50 เมตร/วินาที
2. 100 เมตร/วินาที
3. 125 เมตร/วินาที
4. 500 เมตร/วินาที



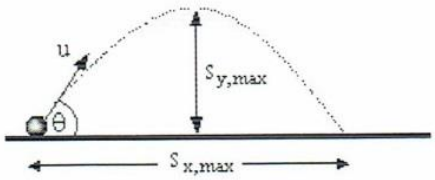

y: $v_y^2 = u_y^2 + 2gs_y$

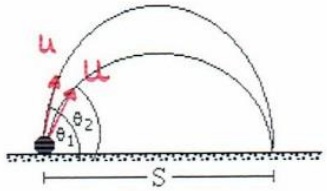
$= 0 + 2(10)500$

$v_y = 100$ m/s

$\therefore\ v_x = v_y = 100$ m/s

## สูตรลัดของโพรเจกไทล์ในรูปแบบอย่างง่ายและการคำนวณรูปแบบพิเศษ




❶ $t = \frac{2u\sin\theta}{g}$

❷ $s_{x,max} = \frac{u^2\sin 2\theta}{g}$ ($\sin 2\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta$)

❸ $s_{y,max} = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$

❹ $\frac{s_{y,max}}{s_{x,max}} = \frac{1}{4}\tan\theta$

} ไม่คิด ค.ม.

❺ การขว้างวัตถุให้ได้ $s_{x,max}$ เกิดได้เมื่อ $\theta = 45$

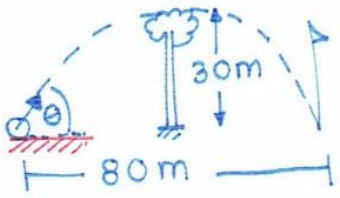
❻ การขว้างวัตถุให้ตกไกลเท่ากัน มีเงื่อนไขดังนี้

(6.1) u ต้องเท่ากัน (6.2) $\theta_1 + \theta_2 = 90$

☺ **สังเกต** เวลาที่ใช้จะไม่เท่ากัน เพราะมุมใหญ่ จะวิ่งอ้อมจึงใช้เวลามากกว่า

**Ex 7** วิศวกรคนหนึ่งต้องการตีลูกกอล์ฟให้ข้ามต้นไม้สูง 30 เมตร และอยู่ห่างออกไป 40 เมตร ไปให้ลงหลุมพอดี โดยหลุมอยู่ห่างออกไป 80 เมตร ถามว่าต้องตีลูกกอล์ฟไปในทิศทางทำมุมเท่าใดกับพื้นดิน

1. $\tan^{-1} 3$
2. 45
3. $\tan^{-1}\frac{3}{2}$
4. 60




$\frac{S_{y,m}}{S_{x,m}} = \frac{1}{4}\tan\theta$

$\frac{30}{80} = \frac{1}{4}\tan\theta$

$\tan\theta = \frac{3}{2} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{3}{2}$ #

**Ex 8** นักพุ่งแหลนน้ำหนักมวล 100 กิโลกรัม พุ่งแหลนมวล 6 กิโลกรัม ออกไปด้วยความเร็ว 10 เมตร/วินาที เขาจะพุ่งได้ไกลที่สุดกี่ เมตร (ไม่คิดความสูงคน)

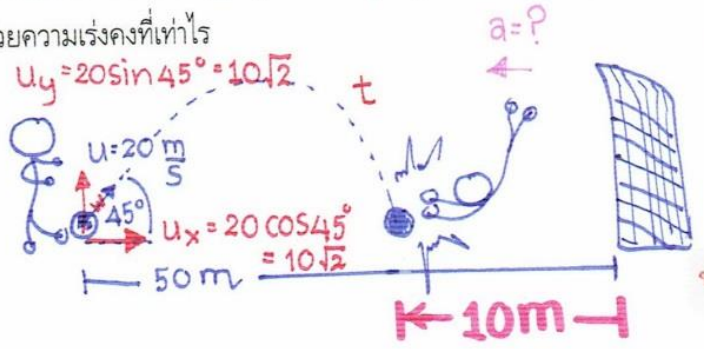
1. 4 เมตร
2. 7.5 เมตร
3. 10 เมตร
4. 12.5 เมตร

$S_{x,m} = \frac{u^2\sin 2\theta}{g}$

$= \frac{10^2\sin(2\times 45^\circ)}{10}$

$= 10$ m #

**Ex 9** นักฟุตบอลเตะลูกบอลไปด้วยความเร็ว 20 เมตรต่อวินาที ในทิศทำมุม 45 องศา กับพื้นสนามไปยัง ประตู ซึ่งห่างจากจุดเตะ 50 เมตร ถ้าในเวลาเดียวกับนักฟุตบอลเตะลูกบอล ผู้รักษาประตูซึ่งยืนที่ประตู ได้วิ่งออกมาทันทีด้วยความเร่งคงที่ และปรากฏว่าผู้รักษาประตูรับลูกบอลได้พอดีที่ลูกบอลตกถึงพื้น จงหาว่าผู้รักษาประตูต้องวิ่งออกมาด้วยความเร่งคงที่เท่าไร




บอล : $t = \frac{2u\sin\theta}{g}$

$= \frac{2(20)\sin 45^\circ}{10} = 2\sqrt{2}$ s

$S_x = u_x t = 10\sqrt{2}(2\sqrt{2}) = 40$m

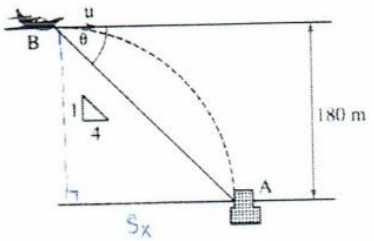
หยประตู : ค.ท.แนวตรง

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$10 = 0 + \frac{1}{2}a(2\sqrt{2})^2 \rightarrow a = 2.5$ m/s²

**Ex 10** เครื่องบินทิ้งระเบิด B บินในแนวระดับสูงจากเป้าหมาย A 180 เมตร แนว BA ทำมุมกับแนวระดับ θ โดย $\theta = \arctan\left(\frac{1}{4}\right)$ จงหาความเร็วต้น u ของเครื่องบินในขณะนั้น เมื่อปล่อยระเบิดลงมาแล้ว ลูกระเบิดจะกระทบเป้า A พอดี

1. 33.3 km/h
2. 120 km/h
3. 432 km/h
4. 720 km/h




$S_x = 180(4) = 720$ m

y : $S_y = u_y t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 180 = 0 + 5t^2$

$t = 6$ s

x : $S_x = u_x t$

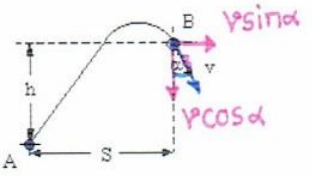
$720 = u(6)$

$u = 120$ m/s $= 120\times\frac{18}{5} = 432$ km/h

**Ex 11** นักกีฬาบาสเกตบอลคนหนึ่งโยนลูกจากจุด A ไปยังห่วงที่จุด B ขณะที่ลูกบาสมาถึงที่จุด B ลูกบาสกำลังเคลื่อนที่ด้วย อัตราเร็ว v โดยมีทิศทำมุม $\alpha$ กับแนวดิ่ง ตามรูป เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของลูกบาสจาก A มา B คือเท่าใด (Ent'38)

1. $\frac{S}{v\sin\alpha}$ 2. $\frac{h}{v\sin\alpha}$

3. $\frac{S}{v\cos\alpha}$ 4. $\frac{h}{v\cos\alpha}$

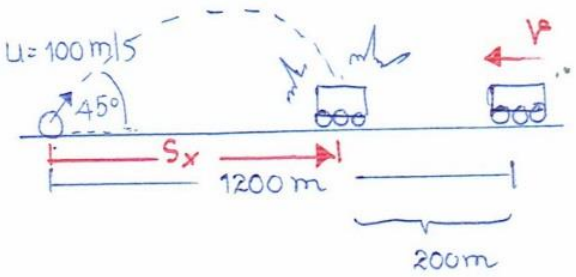



$x: S_x = u_x t$

$S = (v\sin\alpha)t$

$t = \frac{S}{v\sin\alpha}$ #

**Ex 12** ยิงปืนใหญ่ด้วยความเร็วต้น 100 เมตรต่อวินาที ทำมุม 45 องศากับแนวราบ ไปยังรถถังข้าศึกที่กำลัง แล่นตรงเข้ามาด้วยความเร็วคงที่ และขณะนั้นอยู่ห่างออกไปเป็นระยะ 1200 เมตร ถ้ากระสุนปืนกระทบเป้าหมายพอดี จงหาว่ารถถังข้าศึกกำลังแล่นด้วยความเร็วเท่าใด ก่อนที่จะถูกทำลาย




ปืนใหญ่

$t = \frac{2u\sin\theta}{g}$

$t = \frac{2(100)\sin 45^\circ}{10}$

$t = 10\sqrt{2}$ s

$S_x = u_x t$

$= (100\cos 45^\circ)10\sqrt{2}$

$= 1000$ m

Tank แนวราบ

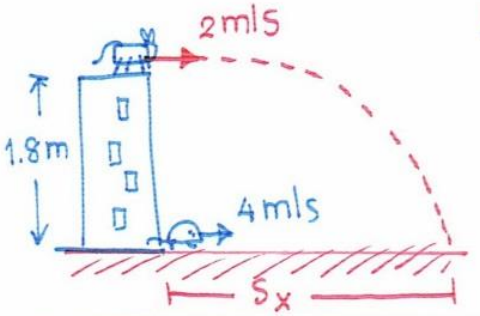
$S = vt$

$200 = v(10\sqrt{2})$

$v = 10\sqrt{2}$ m/s #

**Ex 13** แมวอยู่บนตึกสูง 1.8 m เห็นหนูวิ่งออกจากรูตึกเดียวกันด้วยอัตราเร็ว 4 m/s แมวจึงกระโดดออกจากตึกนั้นด้วยอัตราเร็ว 2 m/s ในแนวราบ เมื่อถึงพื้นแมวจะห่างจากหนูเท่าใด

1. 1 m
2. 1.2 m
3. 1.5 m
4. 1.8 m




Cat: $S_y = u_y t + \frac{1}{2}gt^2$

$1.8 = 0 + 5t^2$

$t = 0.6$ s

$S_x = u_x t$

$= 2(0.6)$

$S_x = 1.2$ m

Rat: $S = vt$

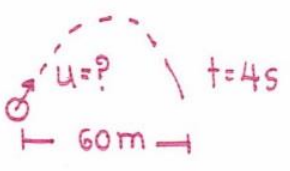
$= 4(0.6)$

$= 2.4$ m

$\therefore \Delta S = 1.2$ m #

**Ex 14** ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนพื้นสนามราบ เขาขว้างลูกบอลขึ้นไปในอากาศ ลูกบอลลอยอยู่ในอากาศนาน 4.0 วินาที โดยไม่คิดแรงต้านของอากาศ ถ้าลูกบอลไปได้ไกลในแนวระดับ 60.0 เมตร ความเร็วที่ใช้ขว้างลูกบอลมีค่าเท่าใด (Ent'37)

1. 15.0 m/s
2. 20.0 m/s
3. 25.0 m/s
4. 30.0 m/s




$S_x = u_x t$ | $S_y = u_y t + \frac{1}{2}gt^2$

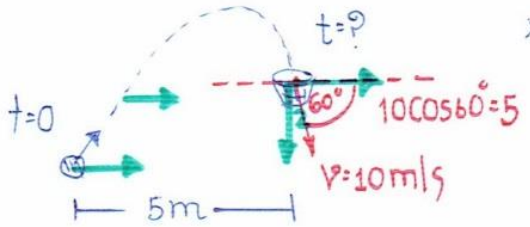
$60 = u_x(4)$ | $0 = 4u_y - 5(4)^2$

$u_x = 15$ m/s | $u_y = 20$ m/s

$\therefore u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 25$ m/s

**Ex 15** นักบาสเกตบอลยิงลูกจากระยะในแนวราบ 5 เมตร ห่างจากห่วง ขณะที่ลูกเข้าห่วง พบว่ามีความเร็ว 10 เมตร/วินาที ทำมุม 60° กับแนวราบ จงหาเวลาที่ลูกบาสเกตบอลใช้ในการเคลื่อนที่มาถึงห่วงในหน่วยวินาที (Ent Oct'42)

1. 1
2. $\sqrt{2}$
3. $\sqrt{3}/2$
4. $2/\sqrt{3}$




$x: S_x = u_x t$ **

$5 = (5)t$

$t = 1$ s #

**Ex 16** ยิงวัตถุขึ้นจากพื้นดินทำมุม $\theta$ กับแนวระดับ อัตราเร็วต้น u ถ้าต้องการยิงวัตถุอีกก้อนหนึ่งจากพื้นดินเพื่อให้ไปตกไกลเท่าก้อนแรก วัตถุก้อนหลังนี้ยิงทำมุมกับแนวระดับและอัตราเร็วต้นเท่าใด (Ent'40)

1. $\frac{\theta}{2}$ และ 2u
2. $90 - \theta$ และ u
3. $2\theta$ และ u
4. $2\theta$ และ $\frac{u}{2}$

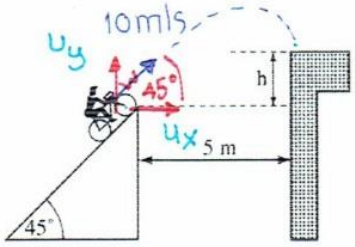
→ u เท่า

→ $\theta + \alpha = 90°$

$\therefore \alpha = 90° - \theta$ #

**Ex 17** นักขี่จักรยานยนต์ผาดโผนต้องการขี่รถข้ามคลองซึ่งกว้าง 5 เมตร ไปยังฝั่งตรงข้าม ถ้าเขาขับรถด้วยความเร็ว 10 เมตร/วินาที แล้วกระโดดข้ามได้พอดี จงหาความสูง h ในภาพนี้ในหน่วยเมตร

1. 1.8
2. 2.0
3. 2.5
4. 3.0




$u_x = 10\cos 45° = 5\sqrt{2}$ m/s

$u_y = 10\sin 45° = 5\sqrt{2}$ m/s

$y: S_y = u_y t + \frac{1}{2}gt^2$

$h = 5\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$h = 5 - 2.5$

$h = 2.5$ m #

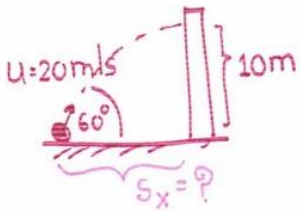
$x: S_x = u_x t$

$5 = 5\sqrt{2}\,t$

$t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ s

**Ex 18** ตำรวจดับเพลิงต้องการฉีดน้ำดับเพลิงซึ่งไหม้อาคารที่ความสูง 10 เมตร ถ้าความเร็วต้นของน้ำที่ออกจากเครื่องฉีดน้ำเท่ากับ 20 เมตร/วินาที และทำมุม 60° กับแนวระดับ เขาจะต้องยืนห่างจากตัวอาคารเป็นระยะเท่าใด (ให้ $g = 10$ m/s²)

1. $10(3 - \sqrt{3})$ เมตร
2. $10(\sqrt{3} - 1)$ เมตร
3. $10(\sqrt{15} - 3)$ เมตร
4. $10(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ เมตร




$y: S_y = u_y t + \frac{1}{2}gt^2$

$10 = (20\sin 60°)t - 5t^2$

$5t^2 - 10\sqrt{3}t + 10 = 0$

$t^2 - 2\sqrt{3}t + 2 = 0$

$t = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 8}}{2} = \sqrt{3} \pm 1$

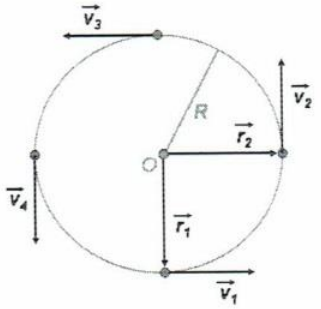
$\therefore x: S_x = u_x t$

$= (20\cos 60°)t$

$= 10(\sqrt{3} - 1)$ m #

## การเคลื่อนที่แบบวงกลม (Motion in a Circle) และสมการการเคลื่อนที่แบบวงกลม

ถ้า $F_{สุทธิ}$ กระทำในทิศตั้งฉากกับความเร็วตลอดเวลา จะเคลื่อนที่เป็นวงกลม โดยจะเกิด a มีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางเรียก " ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง $(a_c)$ "

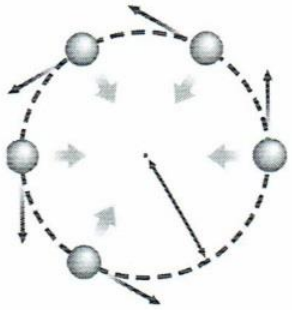



$$a_C = \frac{v^2}{R}$$

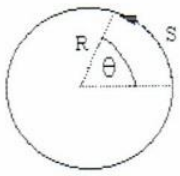
### ◈ การตั้งแกนของการเคลื่อนที่เป็นวงกลม

1. วงกลมในแนวราบ

2. วงกลมในแนวดิ่ง



### ◈ ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็วเชิงเส้น $(V)$, อัตราเร็วเชิงมุม $(\omega)$, คาบ $(T)$ และ ความถี่ $(f)$




พิจารณาจากการเคลื่อนที่เป็นส่วนหนึ่งของวงกลม

1. ระยะทางเชิงมุม $(\theta)$ : $\theta = \frac{S}{R}$ หน่วย radian (rad)
2. อัตราเร็วเชิงเส้น : $V = \frac{S}{t}$

   อัตราเร็วเชิงมุม : $\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{S}{Rt} = \frac{V}{R}$ ดังนั้น $V = \omega R$ .....❶

3. คาบ $(T)$ คือ เวลาที่เคลื่อนที่ครบ 1 รอบหน่วย (s) จาก $\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T}$ ดังนั้น $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .....❷
4. ความถี่ $(f)$ คือ จำนวนรอบใน 1 วินาทีหน่วย (Hz, $s^{-1}$) : $f = \frac{1}{T}$ ดังนั้น $\omega = 2\pi f$ .....❸

จากสมการที่ ❶, ❷, ❸ จะได้ความสัมพันธ์ $V = \omega R$

### ◈ หลัก และรูปแบบการคำนวณ

***หลักการคำนวณ***

$$\sum F_c = ma_c = \frac{mV^2}{R} = m\omega^2 R$$

**Ex 1** วัตถุมวล 0.1 กิโลกรัม กำลังเคลื่อนที่เป็นวงกลม มีรัศมีความโค้ง 2 เมตร ด้วยอัตราเร็วคงที่ 20 เมตรต่อวินาที จงหา

ก. คาบ ข. ความถี่ ค. อัตราเร็วเชิงเส้น ง. อัตราเร็วเชิงมุม

จ. ความเร่งสู่ศูนย์กลาง ฉ. แรงสู่ศูนย์กลาง

ก) $v = \omega R$

$v = \frac{2\pi R}{T}$

$T = \frac{2\pi(2)}{20} = \frac{\pi}{5}$ s #

ข) $f = \frac{1}{T} = \frac{5}{\pi}$ Hz #

ค) $v = 20$ m/s #

ง) $\omega = \frac{v}{R} = \frac{20}{2} = 10$ rad/s #

จ) $a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{400}{2} = 200$ m/s$^2$

ฉ) $\Sigma F_c = ma_c$

$= 0.1(200) = 20$ N #

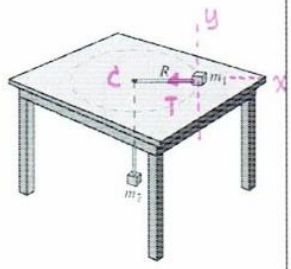
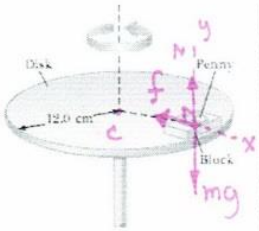
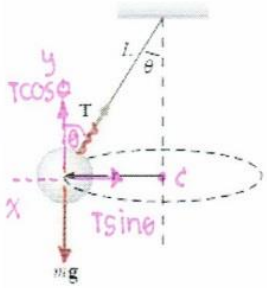
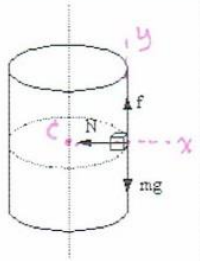
**Ex 2** นำเชือก 2 เมตรผูกกับมวล 0.2 กิโลกรัม แล้วจับปลายเชือกอีกด้านหนึ่งเหวี่ยงเป็นวงกลมในระนาบระดับด้วยอัตราเร็ว 3 เรเดียนต่อวินาที จงหาแรงตึงเชือกขณะเหวี่ยงวัตถุ

$\Sigma F_c = ma_c$

$T = m\omega^2 R = 0.2(3)^2(2) = 3.6$ N #

## วงกลมในแนวระดับ

แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง : มักเป็นแรงตึงเชือก, แรงย่อยของแรงตึงเชือก, แรงเสียดทาน หรือ แรงแนวฉาก (Normal force) ดังนี้

| 1. วงกลมบนโต๊ะผิวเกลี้ยง | 2. วัตถุบนจานหมุน | 3. แกว่งรูปกรวย (เพนดูลัมกรวย) | 4. รถไต่ถัง |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |

$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}$

x: $\Sigma F_c = ma_c$

$N = m\frac{v^2}{R}$ —①

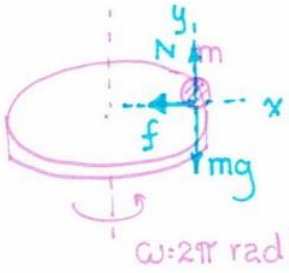
y: ↑ = ↓

$f = mg$ —②

$f \le \mu N$

**Ex 3** วัตถุมวล m วางบนจานกลมที่กำลังหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุม $2\pi$ เรเดียน/วินาที ถ้าวัตถุวางอยู่ห่างจากศูนย์กลางของ จานเป็นระยะ r และขณะที่หมุนวัตถุไม่มีการไถล แรงเสียดทานที่กระทำต่อวัตถุเท่ากับเท่าไร (Ent Oct'42)

1. $4\pi^2 mr$
2. $4\pi^2 r^2 m$
3. $2\pi mr^2$
4. $2\pi mr$




$\omega = 2\pi$ rad/s

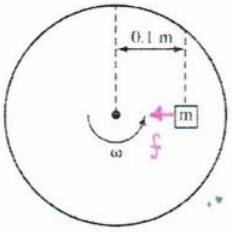
$\Sigma F_c = m\omega^2 R$

$f = m(2\pi)^2 r$

$= 4\pi^2 mr$ #

**Ex 4** วัตถุก้อนหนึ่งวางอยู่บนแผ่นจานราบที่หมุนได้ในแนวระดับ สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสถิตระหว่างผิววัตถุกับแผ่นจาน เท่ากับ 0.25 และวัตถุวางอยู่ที่ระยะ 0.1 เมตร จากจุดหมุน ถ้าไม่ต้องการให้วัตถุไถลขณะที่จานกำลังหมุน จานหมุนจะต้อง หมุนด้วยความเร็วเชิงมุมเท่าใด (Ent'38)

1. 2.5 เรเดียนต่อวินาที
2. 5 เรเดียนต่อวินาที
3. 7.5 เรเดียนต่อวินาที
4. 10 เรเดียนต่อวินาที




$\Sigma F_c = ma_c$

$\mu N = m\omega^2 R$

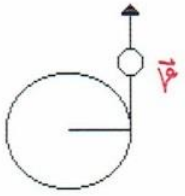
$\mu mg = m\omega^2 R$

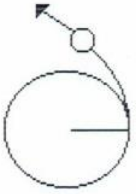
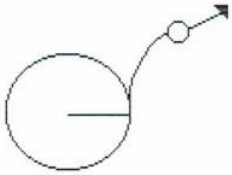
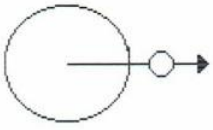
$0.25(10) = \omega^2(0.1)$

$\omega = 5$ rad/s #

**Ex 5** ในการทดลองการเคลื่อนที่วงกลมในระนาบระดับ ขณะที่กำลังแกว่งให้จุกยางหมุนอยู่นั้นเชือกที่ผูกกับจุกยางขาดออกจากกัน นักเรียนคิดว่าขณะที่เชือกขาด ภาพการเคลื่อนที่ที่สังเกตจากด้านบนจะเป็นตามรูปใด ถ้า a เป็นตำแหน่งของจุกยางขณะที่เชือกขาด (Ent Mar'43)

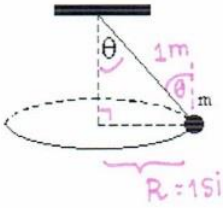
วัตถุ จะ ค.ท. ตามทิศ $\vec{v}$

1. 

2. 
3. 
4. 

**Ex 6** จากรูปวัตถุมวล m ผูกเชือกยาว 1 เมตร ปลายข้างหนึ่งผูกติดกับเพดาน แกว่งให้มวล m เคลื่อนที่แบบวงกลมในระนาบระดับด้วยอัตราเร็ว $\frac{\sqrt{5}}{\pi}$ รอบต่อวินาที จงหาว่าเส้นเชือกทำมุมเท่าใดกับแนวดิ่ง

$f$




$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg} = \frac{\omega^2 R}{g}$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = (2\pi f)^2 \frac{\sin\theta}{g}$

$= \left(2\pi\frac{\sqrt{5}}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{g} = 2$

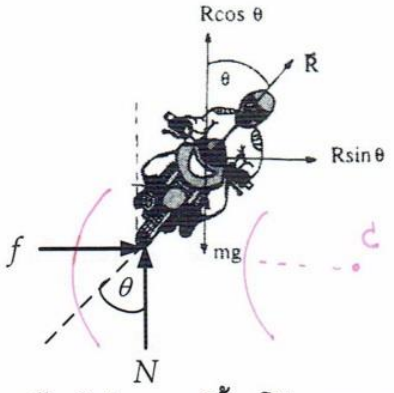
$\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 60^\circ$ #

## การเคลื่อนที่ของรถบนทางโค้ง

### ① มอเตอร์ไซค์เลี้ยวโค้งหรือรถยนต์เลี้ยวโค้ง

- ต้องมีแรงเสียดทานเป็นแรงเข้าสู่ศูนย์กลางจึงเลี้ยวโค้งได้
- ความเร็วต้องต่ำจึงจะปลอดภัย

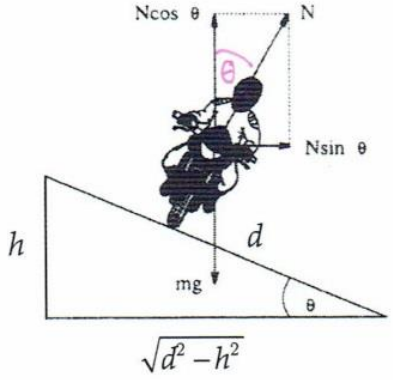



$$\mu = \frac{V^2}{Rg} = \tan\theta$$ ถ้า $\frac{V^2}{Rg} \le \mu$ รถจะไม่ล้ม

มุมที่รถเอียงไปจากดิ่ง

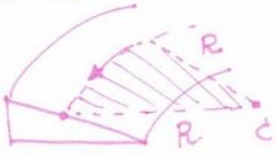
### ② มอเตอร์ไซค์หรือรถยนต์เลี้ยวโค้งบนทางยกระดับ

พิจารณาพื้นไม่มี friction พบว่ามุมที่พื้นยกจากแนวระดับมีค่าเท่ากับมุมที่รถเอียงตัวจากแนวดิ่ง




เหมือน Pendulum กรวย

$$\tan\theta = \frac{V^2}{Rg} = \frac{h}{\sqrt{d^2-h^2}}$$




**Ex 7** รถคันหนึ่งเลี้ยวโค้งบนถนนราบด้วยรัศมีความโค้ง 100 เมตร สัมประสิทธิ์ความเสียดทานของล้อกับถนนเป็น 0.4 รถคันนี้จะเลี้ยวด้วยอัตราเร็วได้สูงสุดเท่าไร

$\mu = \frac{V^2}{Rg}$

$V = \sqrt{\mu Rg}$

$V = \sqrt{0.4(100)10}$

$V = 20$ m/s #

**Ex 8** วิศวกรผู้หนึ่งต้องการตัดถนนโค้งที่มีรัศมีความโค้ง 500 เมตร เพื่อให้รถแล่นได้โดยปลอดภัย แม้ในขณะที่มีฝนตก ถนนลื่นที่ความเร็ว 90 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เขาจะต้องตัดถนนให้เอียงทำมุมกับแนวระดับเท่าใด

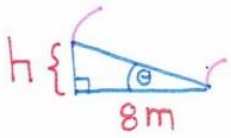
$\tan\theta = \frac{V^2}{Rg} = \frac{25^2}{500(10)} = 0.125$

$90 \times \frac{5}{18} = 25 \frac{m}{s}$

$\theta = \tan^{-1}(0.125)$ #

**Ex 9** รถยนต์คันหนึ่งวิ่งบนทางโค้งด้วยอัตราเร็ว 90.0 กิโลเมตรต่อชั่วโมง รัศมีความโค้งของถนน 500.0 เมตร ความกว้างของถนนวัดตามแนวราบเทียบกับจุดต่ำสุดของด้านในได้ 8.0 เมตร จะต้องยกขอบถนนด้านนอกให้สูงกว่าด้านในเท่าใด เมื่อรถวิ่งบนทางโค้งแล้วไม่ไถลออกนอกเส้นทาง (Ent'37)

1. 1.25 m
2. 1.0 m
3. 0.75 m
4. 0.8 m




$v = 90 \times \frac{5}{18} = 25$ m/s

$R = 500$ m

$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}$

$\frac{h}{8} = \frac{25^2}{500(10)} \rightarrow h = 1$ m #

**Ex 10** ขณะขับรถบนทางโค้งมีรัศมีความโค้ง 200 เมตร ผู้ขับขี่จะมองเห็นตุ๊กตาที่แขวนอยู่ในรถเอียงทำมุม 30 กับแนวดิ่ง ความเร็วของรถขณะนั้นจะเป็นเท่าใด

1. 31 เมตร/วินาที
2. 34 เมตร/วินาที
3. 54 เมตร/วินาที
4. 59 เมตร/วินาที

$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}$

$\tan 30^\circ = \frac{v^2}{200(10)}$

$v^2 = \frac{2000}{\sqrt{3}}$

$v \approx 34$ m/s #

**Ex 11** ถ้าสมมติว่าในขณะเวลาฝนตก ประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างยางล้อรถกับผิวถนนจะลดลงเหลือครึ่งหนึ่งของค่าปกติแล้ว ความเร็วสูงสุดของรถในการเลี้ยวโค้งบนถนนในแนวราบโดยไม่มีการลื่นไถลจะลดลงเหลือกี่เปอร์เซ็นต์ของค่าปกติ

1. 25%
2. 50%
3. 71%
4. 75%

| ฝนไม่ตก | ฝนตก |
|---|---|
| $2\mu$ | $\mu$ |
| $v_1 = 100\%$ | $v_2$ |

$\mu = \frac{v^2}{Rg}$

$v \propto \sqrt{\mu}$

$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$

$\frac{v_2}{100} = \sqrt{\frac{\mu}{2\mu}}$

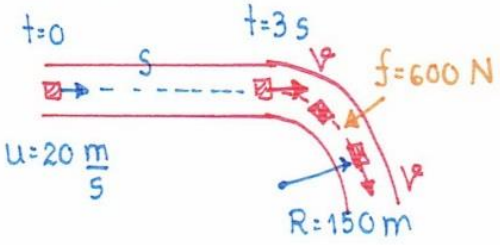
$v_2 = \frac{100}{\sqrt{2}} = 50\sqrt{2}$

$\therefore v_2 \approx 71\%$

$72 \times \frac{5}{18} = 20$ m/s

**Ex 12** รถยนต์มวล 900 กิโลกรัม วิ่งมาตามถนนตรงในแนวระดับด้วยอัตราเร็ว 72 กิโลเมตร/ชั่วโมง ได้ชะลอความเร็วลงอย่าง สม่ำเสมอก่อนถึงทางโค้งราบเป็นเวลา 3 วินาที จึงวิ่งได้อย่างปลอดภัย อยากทราบว่าระยะทางตั้งแต่เริ่มลดความเร็วจนถึง ทางโค้งนั้นเป็นเท่าไร ถ้าทางโค้ง 150 เมตร และแรงเสียดทานระหว่างยางรถยนต์กับถนนในแนวรัศมีความโค้ง เป็น 600 นิวตัน

1. 15 เมตร
2. 30 เมตร
3. 45 เมตร
4. 60 เมตร




$\Sigma F_c = ma_c$

$f = \frac{mv^2}{R}$

$600 = \frac{900v^2}{150}$

$v = 10$ m/s

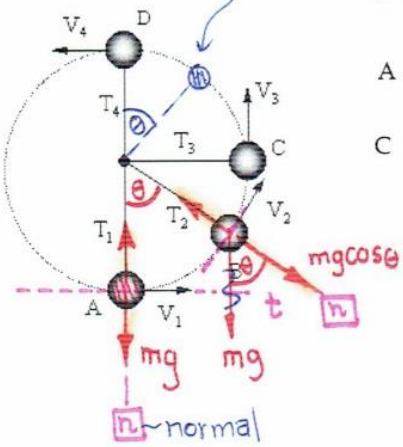
$s = \left(\frac{u+v}{2}\right)t$

$= \left(\frac{20+10}{2}\right)3$

$= 45$ m #

## วงกลมในแนวดิ่ง, การแกว่งลูกตุ้มนาฬิกา, การเคลื่อนที่บนรางโค้ง

$T+mg\cos\theta=\frac{mv^2}{R}$ $\sum F_c = ma_c = \frac{mv^2}{R}$




การพิจารณาการตั้งสมการการเคลื่อนที่แบบวงกลม ณ.ตำแหน่งต่างๆ

A : $T_1 - mg = \frac{mv_1^2}{R}$ .....❶

B : $T_2 - mg\cos\theta = \frac{mv_2^2}{R}$ .....❷

C : $T_3 = \frac{mv_3^2}{R}$ .....❸

D : $T_4 + mg = \frac{mv_4^2}{R}$ .....❹

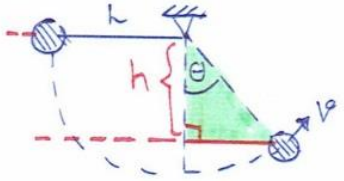
*TIP & TRICK* การหาค่าความเร็วลัพธ์เราใช้สูตรลัด

$v = \sqrt{2gh}$ เฉพาะ $u=0$

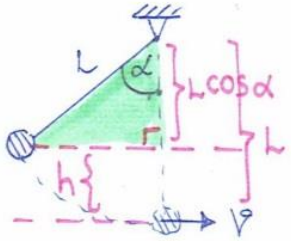
ถ้า $u \neq 0$ $v^2 = u^2 \pm 2gh$ (-g ขึ้น, +g ลง)

จากสมการ ❶, ❷, ❸, ❹ ได้ข้อสรุปเพิ่มเติมว่า 1. $v_1 > v_2 > v_3 > v_4$ 2. $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$

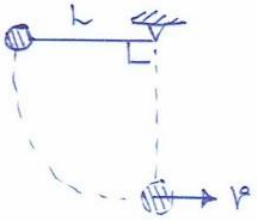
**ตัวอย่างการคิดความเร็ว**




$v = \sqrt{2gL\cos\theta}$

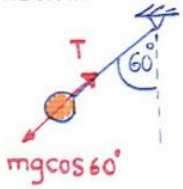



$v = \sqrt{2g(L - L\cos\alpha)}$




$v = \sqrt{2gL}$

**Ex 13** วัตถุมวล 1 กิโลกรัมผูกติดกับเชือกยาว 1 เมตร แกว่งเป็นวงกลมในระนาบดิ่ง เมื่อเชือกทำมุม 60° กับแนวดิ่งจากตำแหน่งต่ำสุดของแนวการเคลื่อนที่จงหาความตึงในเส้นเชือก ถ้าขณะนั้นอัตราเร็วในการเคลื่อนที่ที่ตำแหน่งนั้นเป็น 5 เมตรต่อวินาที



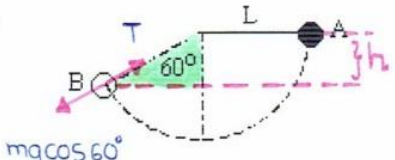

$T - mg\cos 60^\circ = \frac{mv^2}{R}$

$T - 10\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1(5)^2}{1}$

$\therefore \quad T = 30 \text{ N}$ #

**Ex 14** ลูกตุ้มมวล m แขวนด้วยเชือกยาว L ปล่อยลูกตุ้มลงจากตำแหน่ง A ซึ่งเชือกแขวนอยู่ในแนวระดับ ดังรูป ขณะเมื่อลูกตุ้มเคลื่อนที่ลงมาที่ตำแหน่ง B ซึ่งลูกตุ้มทำมุม 60 กับแนวดิ่ง ความตึงในเส้นเชือกขณะนั้นจะเป็นเท่าไร (g คือ ความเร่งโน้มถ่วง)

1. $\frac{1}{2}$ mg
2. mg
3. $\frac{3}{2}$ mg
4. $\frac{5}{2}$ mg




$T - mg\cos 60^\circ = \frac{mv^2}{R}$

$T - mg\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{m(gL)}{L}$

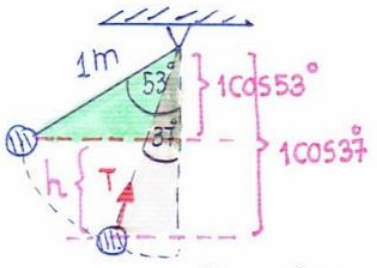
$T = mg + \frac{1}{2}mg$

$T = \frac{3}{2}mg$ #

$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gL\cos 60^\circ} = \sqrt{gL}$

**Ex 15** มวล 1 กิโลกรัม ผูกด้วยเชือกยาว 1 เมตร นำปลายเชือกอีกปลายหนึ่งไปผูกติดกับตะปูจับมวล 1 กิโลกรัมไว้ โดยให้เชือกทำมุม 53 กับแนวดิ่ง แล้วปล่อยให้มวล 1 กิโลกรัมเคลื่อนที่เมื่อเชือกทำมุม 37 กับแนวดิ่ง เชือกมีความตึงเท่าใด

1. 1 นิวตัน
2. 2 นิวตัน
3. 6 นิวตัน
4. 12 นิวตัน



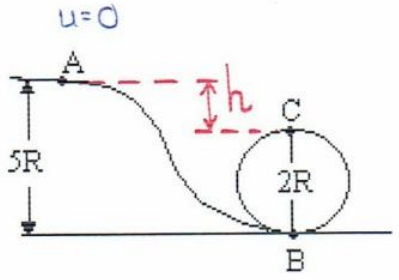

$h = \cos37^\circ - \cos53^\circ = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$ m

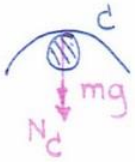
$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$ → $v = \sqrt{2gh}$

$T - 1(10)\cos37^\circ = \frac{1(2)^2}{1}$ $= \sqrt{2(10)\frac{1}{5}}$

$T = 12$ N # $= 2$ m/s

**Ex 16** วัตถุมวล 2 กิโลกรัม อยู่บนรางลื่น ที่จุด A สูงจากพื้น 5R เมตร และส่วนโค้ง BC มีรัศมี R ถ้าปล่อยมวลให้ไถลลงมาจากตำแหน่ง A มวลจะเคลื่อนที่ไปตามราง แรงปฏิกิริยาของรางที่กระทำต่อวัตถุที่จุด C จะมีค่ากี่นิวตัน




$\Sigma F_C = ma_C$

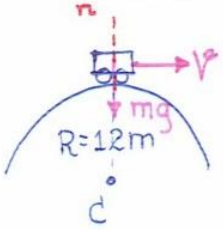
$N_C + mg = \frac{mv^2}{R}$ → $v = \sqrt{2gh}$ $= \sqrt{2g(3R)}$

$N_C + 20 = \frac{2(6gR)}{R}$

$\therefore$ $N_C = 100$ N #

**Ex 17** รถยนต์มวล 1,200 กิโลกรัม กำลังวิ่งด้วยอัตราเร็ว $v$ เมตรต่อวินาที ข้ามสะพาน ที่จุดสูงสุดของสะพานซึ่งมีรัศมีความโค้ง ในระนาบดิ่ง 12 เมตร จงหาอัตราเร็ว $v$ ที่พอดีทำให้รถยนต์เริ่มหลุดจากความโค้งของสะพาน

1. 11 เมตรต่อวินาที
2. 12 เมตรต่อวินาที
3. 13 เมตรต่อวินาที
4. 14 เมตรต่อวินาที




$N = 0$

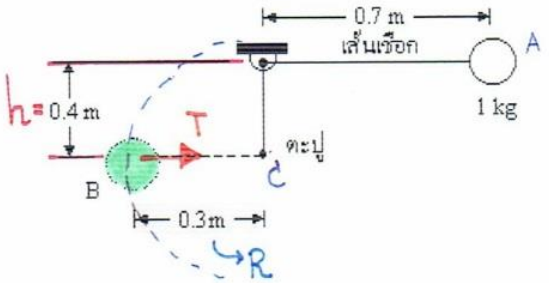
$\Sigma F_C = ma_C$

$mg = \frac{mv^2}{R}$

$v = \sqrt{gR} = \sqrt{10(12)}$

$\therefore$ $v \approx 11$ m/s #

**Ex 18** ลูกบอลมวล 1 กิโลกรัม ถูกปล่อยจากตำแหน่ง A ให้แกว่งลงมาพาดกับตะปู แรงตึงในเส้นเชือกเมื่อลูกบอลอยู่ที่ตำแหน่ง B มีค่าเท่าไร ให้ถือว่าไม่มีการสูญเสียพลังงาน และค่า $g = 10$ เมตร/วินาที$^2$



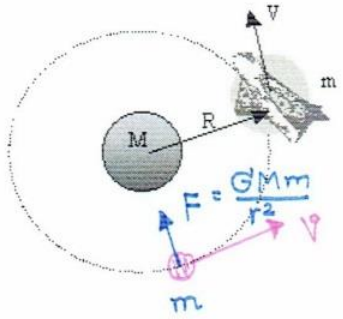

$T = \frac{mv^2}{R}$ → $v = \sqrt{2gh}$ $= \sqrt{2(10)(0.4)}$

$= \frac{1(8)}{0.3}$ $= \sqrt{8}$

$\therefore$ $T = 26.6$ N

1. 11.4 นิวตัน
2. 16.0 นิวตัน
3. 20.0 นิวตัน
4. 26.6 นิวตัน

## การเคลื่อนที่ของดาวเทียม




พิจารณา $F=\frac{mV^2}{R}$

$\frac{GmM}{R^2}=\frac{mV^2}{R}$ $\left(V=\omega R=\left(\frac{2\pi}{T}\right)R\right)$

Note $g=\frac{GM}{R^2}$

จะได้ ความเร็วโคจร $\boxed{v=\sqrt{\frac{GM}{R}}}$ → $R_{orbit}$

จะได้ $T^2=\left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)R^3$ $\therefore$ $\boxed{T^2\alpha R^3}$ kepler's law

◈ ถ้าเป็นการเปรียบเทียบการโคจร***รอบสิ่งเดียวกัน***ของวัตถุ 2 ชนิดจะได้สมการ $\boxed{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2=\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}$ .....❋

**Ex 19** ดาวเทียมดวงหนึ่งโคจรรอบโลกเป็นวงกลม สูงจากพื้นโลกเป็นระยะทาง 10000 กิโลเมตร ดาวเทียมดวงนี้มีอัตราเร็วกี่กิโลเมตร/s ( $R_E$ = 6400 km )

$V=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}$ —①

จาก : → $g=\frac{GM}{R_E^2}$

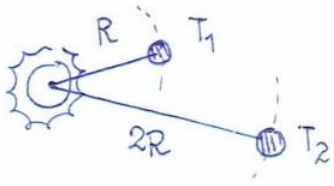
$GM = 10(6400\times10^3)^2$ —❋

$V=\sqrt{\frac{10(6400\times10^3)^2}{(10000+6400)\times10^3}}$

$= 5\times10^3$ m/s $= 5$ km/s #

**Ex 20** ถ้าวงโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์เป็นวงกลมและรัศมีของวงโคจรเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่าของรัศมีเดิม คาบของการโคจรจะเพิ่มเป็นกี่เท่าของคาบเดิม (Ent'37)

1. $\sqrt{2}$ เท่า
2. 2 เท่า
3. $2\sqrt{2}$ เท่า
4. 4 เท่า

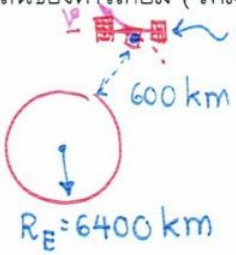



$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2=\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3$

$=\left(\frac{2R}{R}\right)^3$ → $\frac{T_2}{T_1}=2\sqrt{2}$ #

**Ex 21** ดาวเทียมดวงหนึ่งโคจรรอบโลกที่ความสูง 600 กิโลเมตรจากผิวโลก และมีอัตราเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงเป็น 8.2 เมตร ต่อ (วินาที)$^2$ จงหาอัตราเร็วเชิงเส้นของดาวเทียม ( รัศมีของโลกคือ 6,400 กิโลเมตร ) (Ent Oct'43)

1. 5.6 กิโลเมตรต่อวินาที
2. 6.6 กิโลเมตรต่อวินาที
3. 7.6 กิโลเมตรต่อวินาที
4. 8.6 กิโลเมตรต่อวินาที




$V=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}$ $\left(g=\frac{GM}{R_o^2},\ GM=gR_o^2\right)$

$=\sqrt{\frac{gR_o^2}{R_o}}=\sqrt{gR_o}$

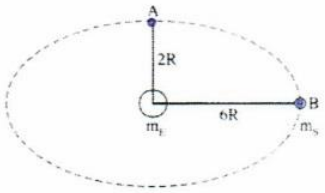
$=\sqrt{8.2(7000\times10^3)}$

$= 7.6\times10^3\ \frac{m}{s} = 7.6\ \frac{km}{s}$ #

**Ex 22** ดาวเทียมมวล $m_s$ โคจรเป็นวงรีรอบโลกซึ่งมีมวล $M_E$ โดยมีระยะไกลสุดและใกล้สุดเป็น $6R$ และ $2R$ ตามลำดับ เมื่อ $R$ เป็นขนาดรัศมีโลก เมื่อคิด เฉพาะผลของแรงดึงดูดระหว่างมวลขนาดของ ความเร็วเชิงมุมที่ระยะใกล้ที่สุด $\omega_A$ มีค่าเป็นกี่เท่าของขนาดความเร็วเชิงมุมทีระยะไกลที่สุด $\omega_A$ $\left[\frac{\omega_A}{\omega_B}\right]$

$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

1. $\sqrt{2}$
2. $\sqrt{9}$
3. $\sqrt{12}$
4. $\sqrt{27}$
5. $\sqrt{36}$




$T^2 \propto R^3$

$\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2 \propto R^3$

$\omega^2 \propto \frac{1}{R^3}$

$\left(\frac{\omega_A}{\omega_B}\right)^2 = \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^3$

$= \left(\frac{6R}{2R}\right)^3 = 27$

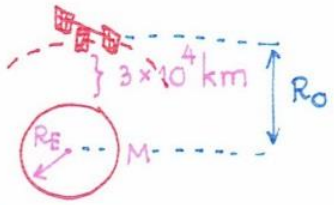
$\therefore \frac{\omega_A}{\omega_B} = \sqrt{27}$ #

**Ex 23** ดาวเทียมสื่อสารดวงหนึ่งถูกส่งขึ้นไปโคจรรอบโลกที่ความสูง $3\times10^4$ km จากผิวโลก จะต้องโคจรรอบโลกด้วยความเร็วเท่าใด จึงจะคงระดับความสูงนี้ได้

กำหนดให้ มวลของโลก = $6\times10^{24}$ kg

รัศมีของโลก = $6\times10^3$ km

ค่า G = $6\times10^{-11}$ $Nm^2/kg^2$



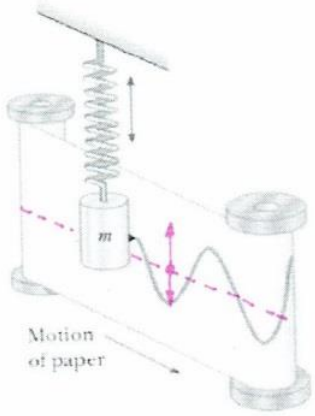

1. $10^3\sqrt{12}$ m/s
2. $10^3\sqrt{10}$ m/s
3. $10^5\sqrt{12}$ m/s
4. $10^5$ m/s

$V = \sqrt{\frac{GM}{R_o}} = \sqrt{\frac{6\times10^{-11}\times6\times10^{24}}{(6\times10^3+3\times10^4)\times10^3}} = 10^3\sqrt{10}$ $\frac{m}{s}$ #

**Memo.** เอาไว้ SARUP สูตรเองนะ

## การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิกส์ (Simple Harmonics Motion)

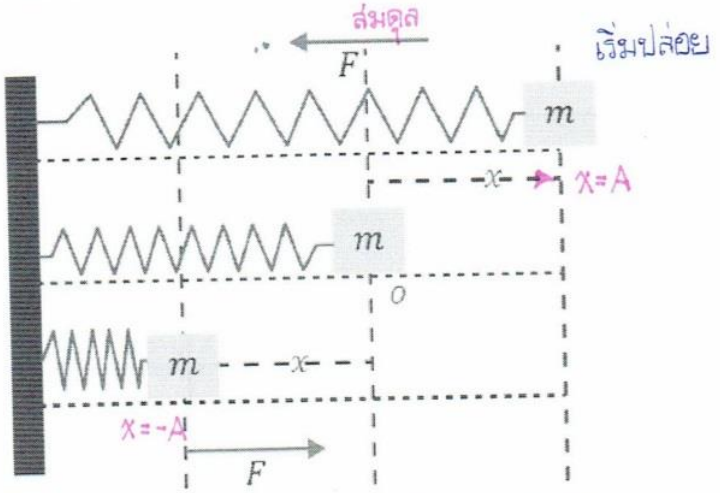
### A เงื่อนไขและการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์การสั่น




เส้นตรง

1. เคลื่อนที่กลับไป-กลับมา แบบมีคาบคงตัว
2. $\vec{a}$ $\alpha$ $-\vec{x}$
   - $x$ มาก → $a$ มาก
   - $\vec{x}$ และ $\vec{a}$ ทิศตรงกันข้าม

### เงื่อนไขและการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์การสั่น

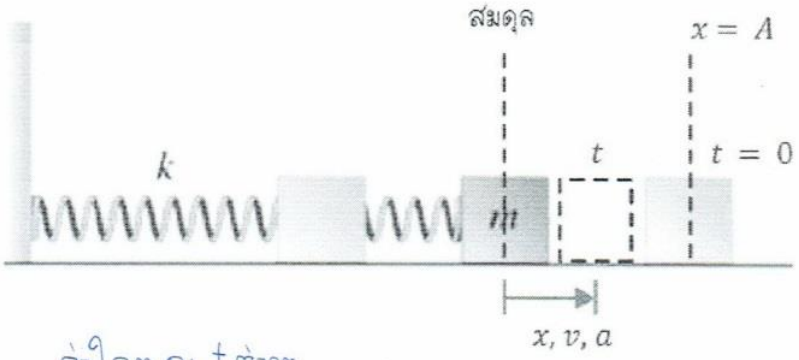



| | | | |
|---|---|---|---|
| การกระจัด $(\vec{x})$ | max | ศูนย์ | max |
| ความเร็ว $(\vec{v})$ | ศูนย์ | max | ศูนย์ |
| ความเร่ง $(\vec{a})$ | max | ศูนย์ | max |
| แรงสปริง $(F_s = kx)$ | max | ศูนย์ | max |
| พลังงานศักย์ยืดหยุ่น $(E_p = \frac{1}{2}kx^2)$ | max | ศูนย์ | max |
| พลังงานจลน์ $(E_k = \frac{1}{2}mv^2)$ | ศูนย์ | max | ศูนย์ |
| $E_T = E_p + E_k = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$ | max | max | max |

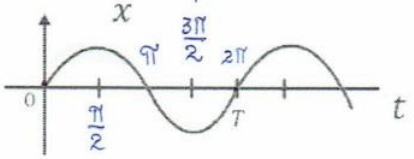
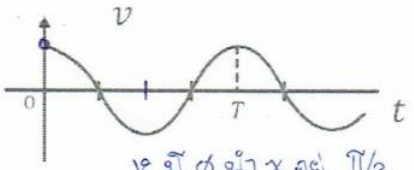
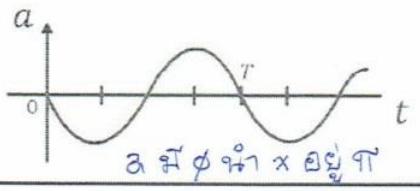
คงที่ทุกตำแหน่ง

## B สมการการคำนวณมวลที่สั่นแบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย

### พิจารณามวลสั่น ณ ตำแหน่งใดๆ




ค่าใดๆ ณ. t ต่างๆ

| | | | |
|---|---|---|---|
| การกระจัด | $x_t = A \sin \omega t$ | $x_m = A$ |  |
| ความเร็ว | $v_t = \omega A \cos \omega t$<br>$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ ↘ หาย x | $v_m = \omega A$ |  |
| ความเร่ง | $a_t = -\omega^2 A \sin \omega t$<br>$a = \pm\omega^2 x$ ↗ หาย x<br>↘ ลบ/s | $a_m = \omega^2 A$ |  |

→ rad
→ เฟส ($\phi$)

v มี $\phi$ นำ x อยู่ $\pi/2$

a มี $\phi$ นำ x อยู่ $\pi$

Note $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ → s

rad/s

Trick สมการ Trigone ใช้กราฟช่วย

Ex $x = A\cos\omega t$

$v = \omega A(-\sin\omega t)$

$= -\omega A \sin\omega t$

$a = -\omega^2 A \cos\omega t$

## C รูปแบบการสั่นบางรูปแบบ

สมการการคำนวณการสั่นแบบฮาร์มอนิกส์อย่างง่าย ทั่วไป

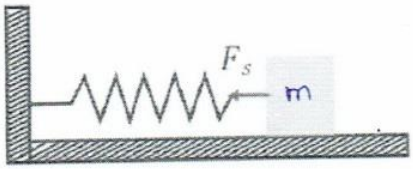
$$\sum F = m\omega^2 A$$

เมื่อ $\sum F$ : แรงที่ทำให้เกิดการสั่น

$A$ : แอมพลิจูดของการสั่น

### Pop Pattern of Problems

**1** การคำนวณการสั่นของมวล-สปริง



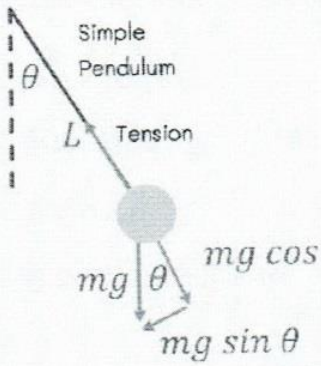

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

NOTE ค่า k มักหาจากสมดุล

**2** ลูกตุ้มนาฬิกา




$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

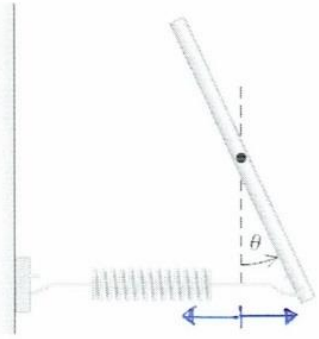
NOTE ค่า $\vec{g}$ อาจเปลี่ยนเป็น $\begin{cases} g = \sum a \\ g = \frac{GM}{R^2} \end{cases}$

**Ex 1**

แท่งวัตถุชิ้นหนึ่ง ดังรูป มีสมการการสั่นเป็นไปตามสมการ

$v = 50\cos(10t + \frac{\pi}{6})$ เมตร/วินาที จงหา

$\omega A$ $\omega$




1) แอมพลิจูด
2) ความเร็วเชิงมุม, ความถี่ และ คาบ ของการสั่น
3) ความเร็วสูงสุดของการสั่น
4) ความเร่งสูงสุดของการสั่น
* 5) สมการ การกระจัดของวัตถุ ณ เวลาใดๆ } คิดเครื่องหมาย
* 6) สมการ ความเร่งของวัตถุ ณ เวลาใดๆ
7) ความเร็วของวัตถุ ณ เวลา $\frac{\pi}{60}$ วินาที
8) ความเร็วของวัตถุ ณ ตำแหน่ง 2 เมตร
9) ความเร่งของวัตถุ ณ เวลาเริ่มต้น → $t=0$ s
10) ความเร่งของวัตถุ ณ ตำแหน่ง 1 เมตร

$x$ sin
$v$ cos
$a$ $-\sin$

(1) $\omega A = 50$
$10A = 50$
$A = 5$ m #

(2) $\omega = 10$ rad/s #
$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5}{\pi} = 1.59$ Hz #
$T = \frac{1}{f} = \frac{\pi}{5} = 0.63$ s #

(3) $v_m = \omega A = 50$ m/s #

(4) $a_m = \omega^2 A = 10^2(5)$
$= 500$ m/s$^2$ #

(5) $x = A\sin\omega t$
$x = 5\sin[10t + \frac{\pi}{6}]$ m #

(6) $a = -\omega^2 A\sin\omega t$
$a = -500\sin[10t + \frac{\pi}{6}]$ m/s$^2$ #

(7) $v = 50\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6})$
$= 50\cos\frac{\pi}{3} = 50(\frac{1}{2}) = 25$ m/s #

(8) $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 10\sqrt{5^2 - 2^2}$
$= 45.83$ m/s #

(9) $a = -500\sin\frac{\pi}{6} = -250$ m/s$^2$ #

(10) $a = \omega^2 x = 10^2(1) = 100$ m/s$^2$ #

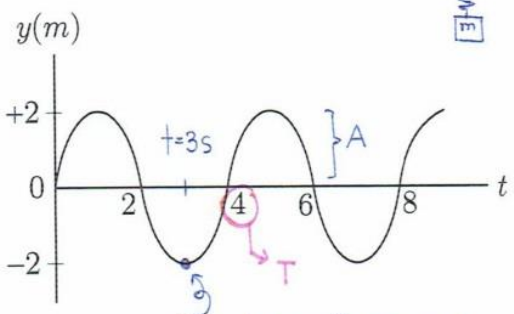
**Ex 2** วัตถุก้อนหนึ่งเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกด้วยแอมพลิจูด 0.5 เมตร (A) และคาบ $\frac{\pi}{4}$ วินาที (T) ณ ตำแหน่งที่ วัตถุมีการกระจัด 0.4 เมตร (x) วัตถุมีความเร็วกี่เมตร/วินาที

1. $0.15\pi^2$
2. 2.4
3. $0.1\pi$
4. 1.2

$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$
$= \frac{2\pi}{\pi/4}\sqrt{0.5^2 - 0.4^2}$
$= 2.4$ m/s

**Ex 3** วัตถุอันหนึ่งมีการกระจัดกับเวลาตามรูป จงคำนวณว่าอัตราเร่งของวัตถุเมื่อเวลาเท่ากับ 3 วินาที เท่ากับกี่เมตร/วินาที$^2$

1. 0
2. 2.0
3. 3.1
4. 4.9




ใกล้สุดจากสมดุล → $a_m$

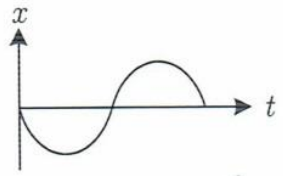
$a_m = \omega^2 A$

$= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A$

$= \left(\frac{2\pi}{4}\right)^2 (2)$

$= 4.9 \ \frac{m}{s^2}$

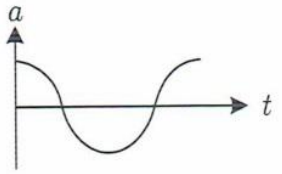
**Ex 4** กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัด (x) กับเวลา (t) ของการเคลื่อนที่แบบซิมเปลิฮาร์โมนิก เป็น ดังรูป

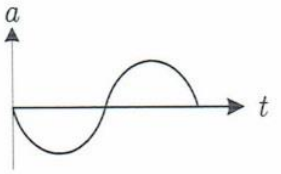


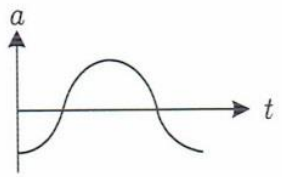

$x = -A\sin\omega t$

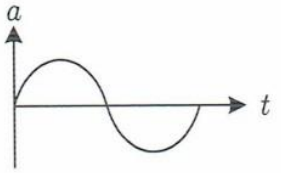
x & a กราฟตรงข้ามกัน

กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร่ง (a) กับเวลา (t) จะเป็นดังรูปในข้อใด

1. 

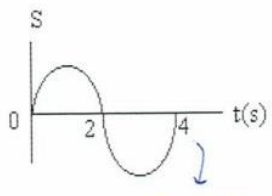

2. 


3. 

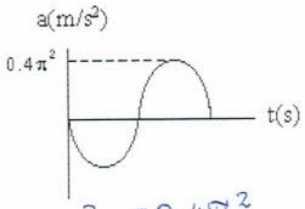

4. 


$a = \omega^2 A \sin\omega t$

**Ex 5** จากรูปจงหาความเร็วสูงสุด ($v_{max}$) ในหน่วยเมตร/วินาที




$T = 4$ s




$a_m = 0.4\pi^2$

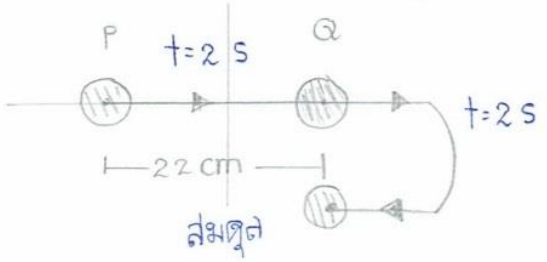
$v_m = \omega A$

$\omega v_m = (\omega^2 A) \leftarrow a_m$

$\frac{2\pi}{4} v_m = 0.4\pi^2$

$v_m = 2.51$ m/s

**Ex 6** อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก โดยใช้เวลา 2 วินาที ในการเคลื่อนที่ผ่านจุด P ไป Q ซึ่งอยู่ห่างกัน 22 เซนติเมตร ขณะผ่าน P และ Q อนุภาคมีอัตราเร็วเท่ากัน อีก 2 วินาทีต่อมา วัตถุเคลื่อนที่กลับมาที่ Q จงหาแอมพลิจูดของการเคลื่อนที่




$x = A\sin\omega t$ ($\omega = \frac{2\pi}{T}$)

จุด Q : $0.11 = A\sin\left[\frac{2\pi}{8}\times 1\right]$

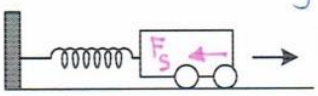
$0.11 = A\sin\frac{\pi}{4}$

$0.11 = \frac{\sqrt{2}}{2}A$

$A = 0.156$ m #

**Ex 7** รถทดลองมวล 500 กรัม ติดอยู่กับปลายสปริงดังรูป เมื่อดึงด้วยแรง 5 N ในทิศขนานกับพื้นจะทำให้สปริงยืดออก 10 เซนติเมตร เมื่อปล่อยรถจะเคลื่อนที่กลับไปมาบนพื้นเกลี้ยงแบบซิมเปิลฮาร์มอนิกส์ ด้วยคาบเท่าไร

1. 0.63 s
2. 0.67 s
3. 1.60 s
4. 2.00 s



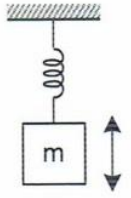

$F = F_s = kx$

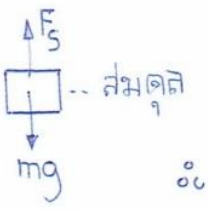
$5 = k(0.1)$

$k = 50\ \frac{N}{m}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{0.5}{50}} = \frac{2\pi}{10} = 0.628$ s #

**Ex 8** แขวนมวล m กับสปริงแล้วปล่อยให้สั่นขึ้นลง วัดคาบได้วินาที ถ้าเอามวล m ออก สปริงจะสั้นกว่าตอนที่แขวนมวล m กี่เมตร (x) (ให้ $\pi^2 \approx 10$)




$kx = mg$

$x = \frac{mg}{k}$ — ①

$\therefore x = \frac{g}{\pi^2} = 1$ m #

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

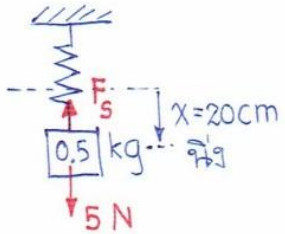
$1 = \pi^2\cdot\frac{m}{k}$

$\frac{m}{k} = \frac{1}{\pi^2}$ — ②

**Ex 9** สปริงอันหนึ่งแขวนไว้กับเพดาน ถ้าแขวนมวล 500 กรัม จะทำให้สปริงยืดออก 20 ซม. ถ้าใช้มวล 2.0 กก. ไปแขวนกับสปริงนี้โดยที่ไม่มีวัตถุใดแขวนและเราดึงให้สปริงยืดออกจากเดิม 40 ซม. เมื่อปล่อยให้เคลื่อนที่

9.1) ความเร่งของมวล 2 กิโลกรัม ขณะอยู่ที่ตำแหน่งมีการกระจัด 10 เซนติเมตร มีขนาดเท่าไร

9.2) เมื่อออกแรง F ดึงมวล 2 กิโลกรัม ให้สปริงยืดออกจากสภาวะสมดุล 30 เซนติเมตร แล้วปล่อยวัตถุให้สั่นสมการการกระจัดขณะใดขณะหนึ่งเป็นอย่างไร



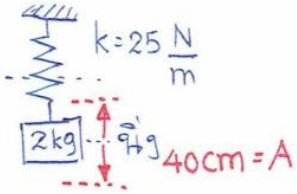

5 N

$\uparrow = \downarrow$

$kx = 5$

$k(0.2) = 5$

$k = 25$ N/m




9.1) $a = \omega^2 x$

$= \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 x = \frac{25}{2}(0.1)$

$a = 1.25\ m/s^2$ #

9.2)

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$

$= 3.54\ \frac{rad}{s}$

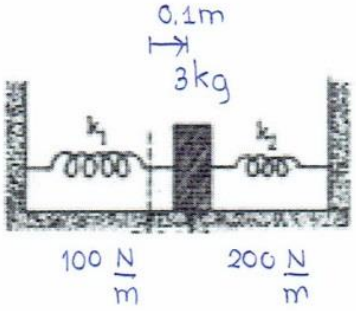
เริ่มต.ท.จากวิม

$x = A\cos\omega t$

$x = 0.3\cos(3.54t)$ m #

**Ex 10** มวล 3 กิโลกรัม วางอยู่บนพื้นราบไม่มีความฝืดและถูกยึดด้วยสปริงสองตัวที่มีค่านิจของสปริง $k_1$ = 100 นิวตัน/เมตร $k_2$ = 200 นิวตัน/เมตร ดังรูป ถ้ามวลนี้เลื่อนตำแหน่งจากจุดสมดุลไปทางขวาเป็นระยะ 0.1 เมตร และปล่อยให้เคลื่อนที คาบของการเคลื่อนที่ของมวลจะมีค่ากี่วินาที (กำหนดให้ $\pi$ = 3.1 และ $\sqrt{3}$ = 1.7)

1. 0.62
2. 0.95
3. 1.74
4. 2.08




$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{Total}}}$

$= 2\pi\sqrt{\frac{3}{300}}$

$T = \frac{2\pi}{10} = 0.62$ s #

โจทย์

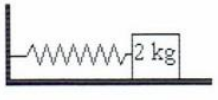
$v_{ตรงกลาง} = ?$

$v_m = \omega A$

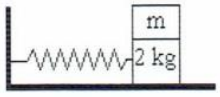
$= \frac{2\pi}{0.62}(0.1)$

$v_m = 1.013\ \frac{m}{s}$ #

**Ex 11** เมื่อมวล 2 กิโลกรัมติดปลายลวดสปริง ดังรูปที่ 1 ดึงสปริงให้ยืดออกแล้วปล่อยให้วัตถุเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิก บนพื้นราบเกลี้ยง วัตถุเคลื่อนที่ครบ 1 รอบใช้เวลา 1 วินาที ถ้ามีมวล m วางทับมวล 2 กิโลกรัม ดังรูปที่ 2 ทำให้วัตถุเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิกและครบ 1 รอบ ใช้เวลา 1.5 วินาที จงหาค่า m ในหน่วยกิโลกรัม




รูปที่ 1 $T_1 = 1$ S




รูปที่ 2 $T_2 = 1.5$ S

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$

$\frac{1.5}{1} = \sqrt{\frac{m+2}{2}}$

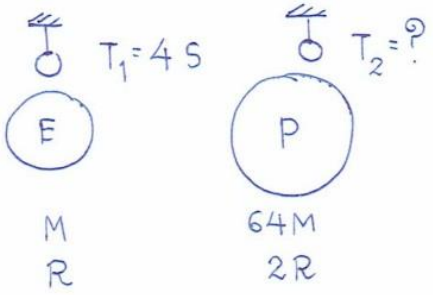
$2.25 = \frac{m+2}{2}$

$4.5 = m+2$

$m = 2.5$ kg #

**Ex 12** ลูกตุ้มนาฬิกาอันหนึ่งเมื่อใช้แกว่งบนโลกจะมีคาบการแกว่ง 4 วินาที ถ้านำไปแกว่งบนดาวดวงหนึ่ง ซึ่งมีมวลเป็น 64 เท่าของโลก และมีรัศมีเป็น 2 เท่าของโลก จะมีคาบการแกว่งเป็นเท่าไร

1. 1 วินาที
2. 4 วินาที
3. 8 วินาที
4. 16 วินาที




$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}\cdot\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \quad T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$$

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\frac{T_2}{4} = \frac{2R}{R}\sqrt{\frac{M}{64M}}$$

$$\therefore T_2 = 1 \text{ s} \quad \#$$

**Ex 13** ถ้าต้องการให้ลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่ายแกว่ง 50 รอบ ในเวลา 80 วินาที ต้องใช้ความยาวสายแขวนกี่ **เซนติเมตร** (กำหนด $\pi^2 = 10$)

$f = \frac{50 \text{ รอบ}}{80} / \frac{80 \text{ s}}{80}$

$f = \frac{5}{8}$ รอบ/s (หน่วยปกติ)

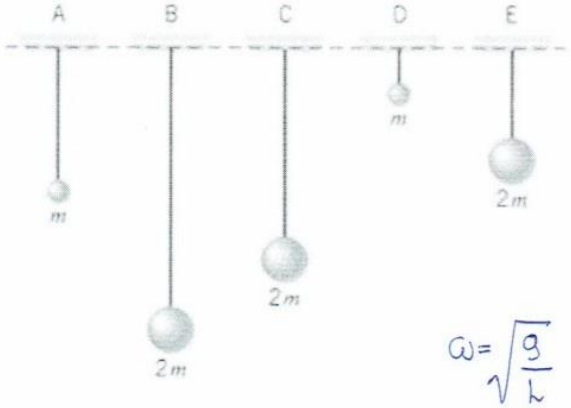
$\therefore$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{g}{L}$$

$$L = \frac{1}{4}\cdot\frac{64}{25} = 0.64 \text{ m} = 64 \text{ cm} \quad \#$$

**Ex 14** Five simple pendulums are shown in the drawings. The lengths of the pendulums are drawn to scale, and the masses are either $m$ or $2m$, as shown. Which pendulum has the smallest angular frequency of oscillation? (a) A (b) B (c) C (d) D (e) E




$\omega$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

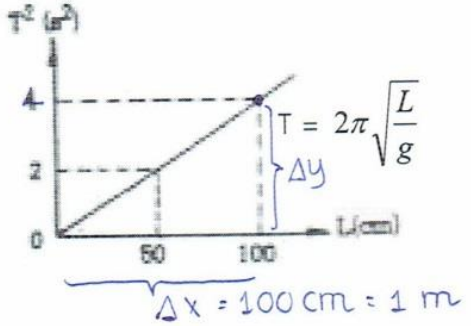
$$f \propto \frac{1}{\sqrt{L}}$$

$\therefore f_{min} \rightarrow L_{max}$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$\therefore \omega_{min} \rightarrow L_{max}$

**Ex 15** จากรูปเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $T^2$ กับ L ถ้าสมการลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย




$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g}$

$y = T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right) = \text{slope}$

$x = L$

เมื่อ T = คาบการแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกา

L = ความยาวของสายลูกตุ้มนาฬิกา จงคำนวณหาค่า g เป็นกี่เมตรต่อวินาที$^2$

$\frac{4\pi^2}{g} = \text{slope}$

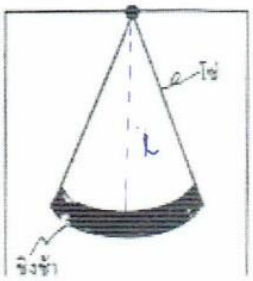
$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{4}{1}$

$g = \pi^2$

$\therefore g = 9.87\ m/s^2$ #

**Ex 16** วิศวกรคนหนึ่งกำลังออกแบบชิงช้าขนาดใหญ่เพื่อบรรจุผู้นั่งคราวละ 10 คน โดยต้องการให้ชิงช้าดังกล่าวมีคาบการเคลื่อนที่เท่ากับ 2 วินาที จงคำนวณหาความยาวของโซ่ทั้งสองเส้นที่จะนำมาผูกชิงช้าดังกล่าวกำหนดค่า g = 10 m/s$^2$

1. $\frac{5}{8\pi^2}$ เมตร
2. $\frac{5}{4\pi^2}$ เมตร
3. $\frac{10}{\pi^2}$ เมตร
4. $\frac{20}{\pi^2}$ เมตร




$T = 2\ s$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{10}}$

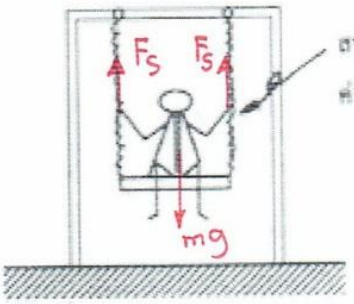
$\frac{1}{\pi^2} = \frac{L}{10}$

$L = \frac{10}{\pi^2}$

$\therefore L_{\text{2 เส้น}} = \frac{20}{\pi^2}$ #

**Ex 17** ชิงช้าอันหนึ่งแขวนอยู่ด้วยสปริงสองอัน สปริงแต่ละอันมีค่าเป็นนิจเท่ากับ 200 นิวตันต่อเมตร ถ้าความยาวเริ่มต้นของสปริงเท่ากับ 1 เมตร ทั้งสองข้าง แล้วมีเด็กมวล 40 กิโลกรัม มานั่ง และแกว่งชิงช้าไปด้วยมุมแคบ ๆ ชิงช้านี้จะแกว่งด้วยความถี่เท่าไร (ให้ $g = 10\ m/s^2$)

1. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10}{3}}$
2. $\frac{1}{2\pi}\sqrt{5}$
3. $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{100}{11}}$
4. $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{25}{3}}$




$\uparrow = \downarrow$

$2F_S = mg$

$2kx = mg$

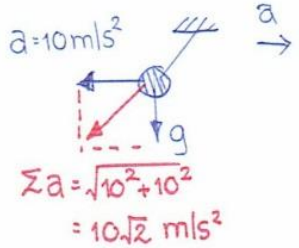
$2(200)x = 400$

$x = 1\ m$

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10}{2}}$

$f = \frac{\sqrt{5}}{2\pi}\ Hz$ #

**Ex 18** นาย ก. อยู่ในรถตู้มวล 2,000 กิโลกรัม ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปตามแนวราบด้วยความเร่ง 10 เมตร/วินาที$^2$ ถ้าเขานำลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย ยาว 10 เซนติเมตร มาแกว่งจะแกว่งได้คาบเป็นกี่วินาที




$\Sigma a = \sqrt{10^2+10^2}$

$= 10\sqrt{2}\ m/s^2$

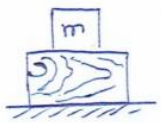
$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\Sigma a}}$

$= 2\pi\sqrt{\frac{0.1}{10\sqrt{2}}}$

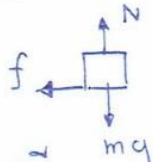
$T = 0.528\ s$ #

**Ex 19** ไม้แผ่นหนึ่งกำลังเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกในแนวระดับด้วยความถี่ 7 รอบในเวลา 20 วินาที และมีแอมปลิจูด 1 เมตร เมื่อวางวัตถุก้อนหนึ่งไว้บนแผ่นไม้นี้ จงหาค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่น้อยที่สุดที่จะทำให้วัตถุไม่เลื่อนไถลบนแผ่นไม้

1. 0.100
2. 0.240
3. 0.848
4. 0.684
5. 0.484




$A = 1\ m$




$f = \frac{7}{20}$ รอบ/20วินาที

$= \frac{7}{20}$ รอบ/s

กลับทิศไป-มา

$\Sigma F = m\omega^2 A$

$f = m\omega^2 A$

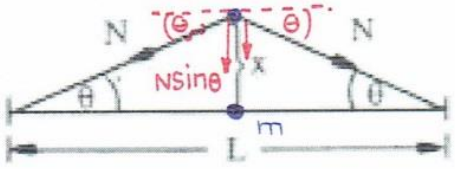
$\mu mg = m(2\pi f)^2 A$

$\mu(10) = \left(2\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{20}\right)^2 1$

$\mu = 0.484$ #

**Ex 20** ปลายทั้งสองข้างของเชือกเส้นหนึ่งยาว L ถูกขึงไว้ดังแสดงในรูป โดยที่กึ่งกลางของเชือกเส้นนี้มีมวล m เล็ก ๆ ซึ่งถือได้ว่ามีขนาดเป็นจุดติดอยู่ เมื่อเราดึงมวล m ขึ้นไปแนวดิ่งห่างจากตำแหน่งสมดุลเป็นระยะทางสั้น ๆ x โดยทำให้เกิดแรงดึงในเส้นเชือกทั้งสองข้างเป็น N เท่า ๆ กัน และเส้นเชือกทำมุม θ เล็ก ๆ กับแนวระดับ หลังจากนั้นจึงปล่อยมือจากมวล m อยากทราบว่า คาบของการสั่น (T) ของมวล m จะเป็นเท่าไร เมื่อไม่คิดมวลของเส้นเชือก และแรงเนื่องจากสนามความโน้มถ่วง

1. $T = \pi\sqrt{\frac{mL}{N}}$
2. $T = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{N}}$
3. $T = \pi\sqrt{\frac{mL}{2N}}$
4. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2mL}{N}}$




$\sin\theta \approx \tan\theta$

mg ไม่คิด → น้อย

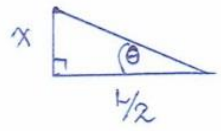
$\sum F = m\omega^2 A$

$2N\sin\theta = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x$

$2N\left(\frac{x}{L/2}\right) = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x$

$\frac{4N}{Lm} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

$2\sqrt{\frac{N}{mL}} = \frac{2\pi}{T}$




$T = 2\pi \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{mL}{N}}$

$\therefore T = \pi\sqrt{\frac{mL}{N}}$ #