ข้อ 1. (10 คะแนน) กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

$$C : x = 2\sin t, y = 2\cos t, 0 \le t \le \pi$$

1.1 จงหาค่าของ $\int_C xe^y ds$ (5 คะแนน)

$$= \int_C xe^y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \quad = \int_0^{\pi} (2\sin t)\, e^{2\cos t} \sqrt{(2\cos t)^2 + (-2\sin t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (4\sin t)\, e^{2\cos t}\, dt$$

$$u = 2\cos t$$
$$du = -2\sin t\, dt$$
$$\int 2e^u(-du) = -2e^u + C$$

$$= -2e^{2\cos t} \Big|_0^{\pi}$$

$$= -2\left[e^{2\cos \pi} - e^{2\cos 0}\right] = -2\left(e^{-2} - e^{2}\right) \quad \#$$

1.2 จงหาค่าของ $\int_C y dy$ (5 คะแนน)

$$= \int_0^{\pi} (2\cos t)(-2\sin t\, dt) = -2\int_0^{\pi} (\sin 2t)\, dt$$

$$= +\cancel{2}\, \frac{\cos(2t)}{\cancel{2}} \Big|_0^{\pi} = \cos(2\pi) - \cos 0 = 0 \quad \#$$

ข้อ 2. (5 คะแนน) กำหนดให้ $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + z\vec{k} + y\vec{k}$

และให้ C เป็นส่วนของเส้นตรงที่มีจุดเริ่มต้นที่ $(1,0,2)$ และสิ้นสุดที่จุด $(2,1,3)$ จงหาค่าของ $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$C : \left.\begin{matrix} (1,0,2) \\ \vec{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x = 1 + t \\ y = 0 + t \\ z = 2 + t \end{matrix}$$

$$x = 1 \rightarrow t = 0$$
$$x = 2 \rightarrow t = 1$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$= \int (1+t)dt + (2+t)dt + t\,dt$$

$$= \int_0^1 (3 + 3t)\,dt = \left(3t + \frac{3t^2}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$= 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \quad \#$$

BRIGHT

ข้อ 3. (4 คะแนน) กำหนดให้ $f(x,y,z) = x^2yz + \cos xy + e^z$

3.1 $\nabla f =$ $(2xyz - y\sin xy)\vec{i} + (x^2z - x\sin xy)\vec{j} + (x^2y + e^z)\vec{k}$

(2 คะแนน)

3.2 จงหาค่าของ $\int_C \nabla f \cdot d\vec{r}$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งใด ๆ ใน ปริภูมิที่มีจุดเริ่มต้นที่ $(0,1,0)$ และจุดสิ้นสุดคือ $(1,\pi,1)$

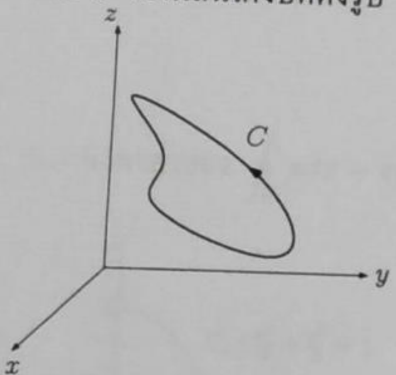
(2 คะแนน)

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(1,\pi,1) - f(0,1,0)$$
$$= (\pi + \cos\pi + e) - (0 + \cos 0 + e^0)$$
$$= \pi - 1 + e - 1 - 1$$
$$= \pi + e - 3 \quad \#$$

ข้อ 4. (4 คะแนน) จงหาค่าของ $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เมื่อ

$$\vec{F}(x,y,z) = \langle 2xyz - y\sin x, x^2z + \cos x, x^2y + 2z \rangle$$

และ C เป็นเส้นโค้งปิดดังรูป



$$\text{curl } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz - y\sin x & x^2z + \cos x & x^2y + 2z \end{vmatrix}$$

$$= (x^2 - x^2)\vec{i} - (2xy - 2xy)\vec{j} + (2xz - \sin x - 2xz + \sin x)\vec{k}$$
$$= 0$$

ดังนั้น $\vec{F}$ เป็น conservative Vector field

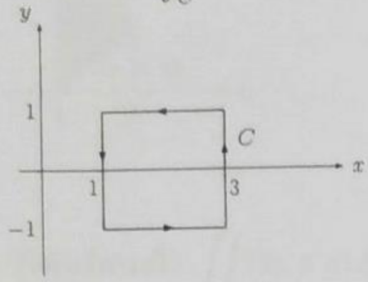
$$\therefore \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \#$$

ข้อ 5. (10 คะแนน) จงเติมคำในช่องว่าง

5.1 ทฤษฎีบทของกรีน ให้ $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ และ ให้ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวที่มีทิศเป็นบวกและ D เป็นเป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วย C แล้ว ทฤษฎีบทของกรีนจะได้ว่า (1 คะแนน)

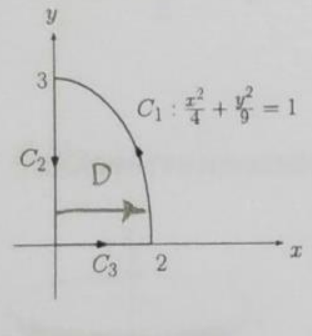
$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D [Q_x - P_y]\,dA$$

5.2 จงหาค่าของ $\oint_C -y\,dx + x\,dy$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งดังรูป (4 คะแนน)



$$\oint_{\mathcal{C}} -y\,dx + x\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\text{Area ในวงปิด}$$
$$= \frac{1}{2}(2\times 2)$$
$$= 2 \quad \#$$

5.3 จงหาค่าของ $\oint_C x\,dx - xy\,dy$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งที่ประกอบด้วย $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ ดังรูป (5 คะแนน)



$P = x \qquad Q = -xy$

$P_y = 0 \qquad Q_x = -y$

$$\frac{x^2}{4} = 1 - \frac{y^2}{9}$$
$$x = \pm\sqrt{4 - \frac{4}{9}y^2} = \pm\frac{\sqrt{36-4y^2}}{3}$$

$$\oint_C x\,dx - xy\,dy = \iint_D [Q_x - P_y]\,dA$$
$$= \iint_D -y\,dA$$
$$= \int_0^3\int_0^{\frac{1}{3}\sqrt{36-4y^2}} -y\,dx\,dy = \int_0^3 -yx\Big|_0^{\frac{1}{3}\sqrt{36-4y^2}} dy$$
$$= \int_0^3 -y \times \frac{1}{3}\sqrt{36-4y^2}\,dy$$
$$= \frac{1}{36}(36-4y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3$$
$$= 0 - \frac{1}{36}(36)^{3/2} = -6 \quad \#$$

$u = 36 - 4y^2$

$du = -8y\,dy$

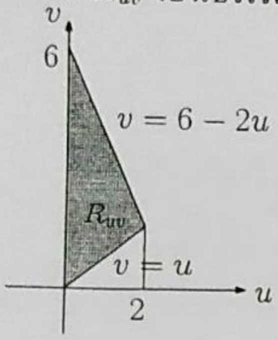
$$\int \frac{1}{24}\sqrt{u}\,du$$
$$= \frac{1}{24}\times\frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

ข้อ 6. (9 คะแนน) จงเขียนปริพันธ์จำกัดเขตที่พร้อมคำนวณโดยไม่ต้องหาค่า เพื่อหา

6.1 ปริพันธ์ตามผิว $\iint_S xy^2z\,dS$ เมื่อ S เป็นพื้นผิวซึ่ง $\vec{r}(u,v) = 2\vec{i} - v\vec{j} + 2u\vec{k}$, $(u,v) \in R_{uv}$

$x=2 \quad y=-v \quad z=2u$

โดยที่ R_{uv} เป็นบริเวณดังรูป (3 คะแนน)



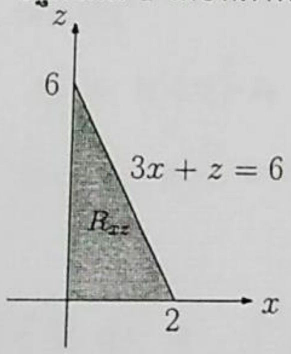
$$= \iint_{R_{uv}} f(\vec{r}(u,v))\,|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\,dA \qquad \vec{r}_u = 2\vec{k}\ ,\ \vec{r}_v = -\vec{j}$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = +2\vec{i}$$

$$= \int_0^2 \int_u^{6-2u} 2v^2(2u)(2)\,dv\,du \qquad \#$$

6.2 ปริพันธ์ตามผิว $\iint_S (2y+z)\,dS$ เมื่อ S เป็นพื้นผิวของระนาบ $3x+2y+z=6$ ใน $\rightarrow y = \dfrac{6-z-3x}{2}$

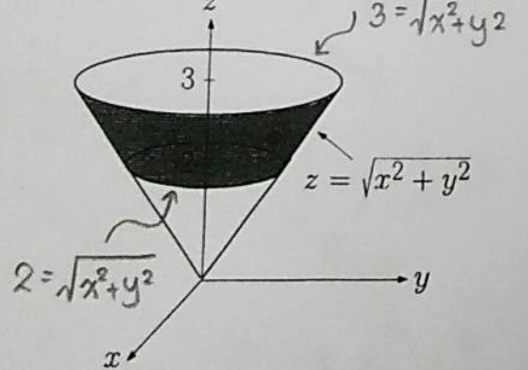
อัฐภาคที่ 1 โดยที่ภาพฉาย R_{xz} ของ S บนระนาบ xz เป็นดังรูป (3 คะแนน)



$$= \iint_{R_{xz}} (2y+z)\sqrt{y_x^2 + 1 + y_z^2}\,dA$$

$$= \int_0^6 \int_0^{\frac{6-z}{3}} \left[6-3x-\cancel{z}+\cancel{z}\right]\sqrt{\left(-\tfrac{3}{2}\right)^2 + 1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2}\,dx\,dy \qquad \#$$

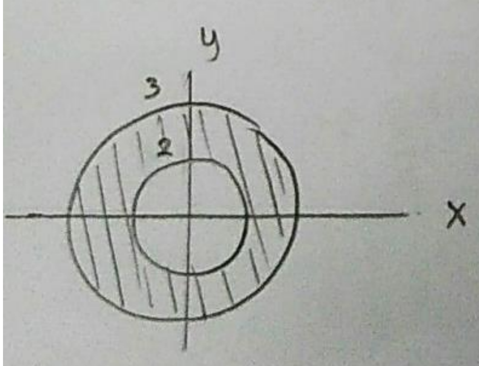
6.3 พื้นที่ผิวของของกรวยกลม $z = \sqrt{x^2+y^2}$ ที่อยู่ระหว่างระนาบ $z=2$ และ $z=3$ ดังรูป (3 คะแนน)



$$S = \iint_S 1\,dS \qquad z_x = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

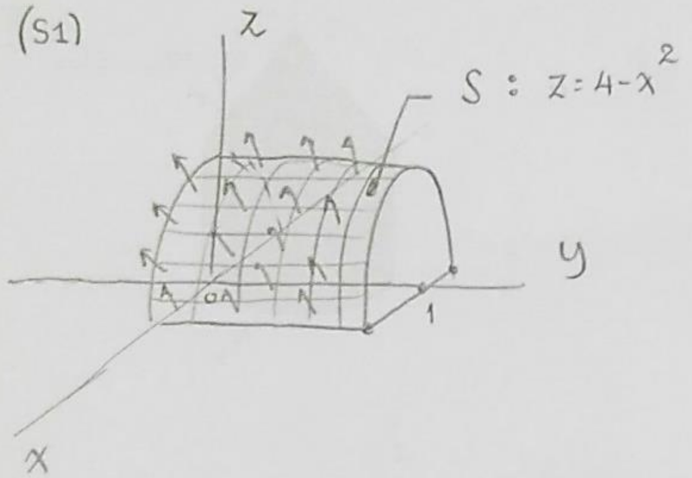
$$= \iint_{R_{xy}} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}\,dx\,dy \qquad z_y = \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

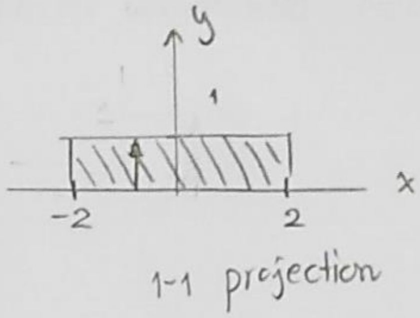
$$= \iint_{R_{xy}} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1}\,dx\,dy \qquad \#$$



ข้อ 7. (8 คะแนน) จงหาค่า $\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ เมื่อ $\vec{F}(x,y,z) = z\,\vec{i} - y^2\sin^{-1}x\,\vec{j} - 8x\,\vec{k}$ และ S คือพื้นผิวของทรงกระบอก $z = 4-x^2$ จาก $y=0$ ถึง $y=1$ และอยู่เหนือระนาบ xy โดยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากมีทิศทางชี้ออกจากพื้นผิว

(S1)





(S2) หา ∇g

$$g = z + x^2 - 4$$

$$\nabla g = (2x)\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k}$$

(S3) $$\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{R_{xy}} \vec{F}\cdot\nabla g \, dA$$

$$= \iint\limits_{R_{xy}} (2x\underbrace{z}_{(4-x^2)} - 8x)\, dA$$

$$= \iint\limits_{R_{xy}} \left[\cancel{8x} - 2x^3 - \cancel{8x}\right] dA = -2\int_{-2}^{2}\int_{0}^{1} x^3\, dy\, dx$$

$$= -2\int_{-2}^{2} x^3 y \Big|_0^1 dx = -2\int_{-2}^{2} x^3\, dx$$

$$= -2\,\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{2}$$

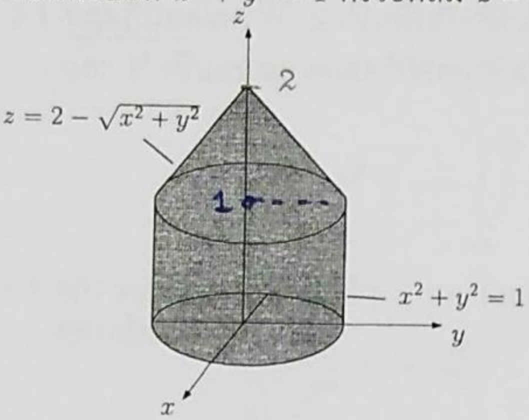
$$= -\frac{1}{2}\left[2^4 - (-2)^4\right] = 0$$

#

ข้อ 8. (8 คะแนน) จงหาใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์เพื่อหาค่า $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ เมื่อกำหนด

$\vec{F}(x, y, z) = e^{y^2 z}\,\vec{i} - (x^2 + z^2)\,\vec{j} + (y + z)\,\vec{k}$ และ S คือพื้นผิวของทรงตันที่ปิดล้อมด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ กรวยกลม $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ และระนาบ xy ดังรูป

(S1)



ใช้ cylindrical coordinate

(S2) $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} e^{y^2 z} + \frac{\partial}{\partial y}(-x^2 - z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(y+z) = 0 + 0 + 1$

(S3) $$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F}\, dv$$

$$= \iiint_E 1\, dV$$

$$= \pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

$$= \pi (1)^2 (1) + \frac{1}{3}\pi (1)^2 1$$

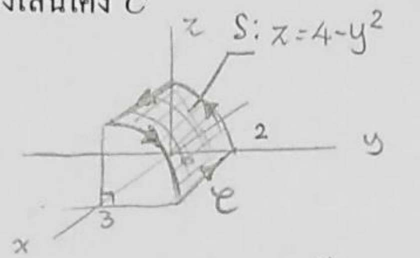
$$= \frac{4}{3}\pi$$ #

ข้อ 9. (9 คะแนน) กำหนดให้ $\vec{F}(x,y,z) = xz\,\vec{i} - 2y\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$ และ S คือพื้นผิวของทรงกระบอก $z = 4 - y^2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 3$ และอยู่ในอัฐภาคที่ 1 โดยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากมีทิศทางชี้ออกจากพื้นผิว

9.1 ทฤษฎีบทสโตก ให้ S เป็นพื้นผิวที่มีเส้นขอบรอบคือเส้นโค้ง C ที่มีทิศทางบวก และ $\vec{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์ที่มีอนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่องบน S แล้ว (1 คะแนน)

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl}\,\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

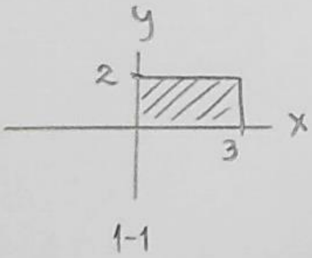
9.2 จงวาดรูปและแรเงาพื้นผิว S และโดยทฤษฎีบทสโตกจงวาดเส้นโค้ง C พร้อมระบุทิศทางของเส้นโค้ง C (2 คะแนน)



9.3 curl $\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & -2y & 4 \end{vmatrix}$ (2 คะแนน)

$$= (0-0)\vec{i} - (0-x)\vec{j} + (0-0)\vec{k} = x\,\vec{j}$$

9.4 จงหาค่า $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ (4 คะแนน)



(S2) $g = z + y^2 - 4$

$\nabla g = 0\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$

(S3) $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl}\,\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{R_{xy}} \text{curl}\,\vec{F}\cdot\nabla g\, dA$

$= \int_0^2\int_0^3 2xy\,dx\,dy$

$= \int_0^2 \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}y\Big|_0^3 dy = \int_0^2 9y\,dy$

$= \frac{9y^2}{2}\Big|_0^2 = 18$ #