

BRIGHT KIDS

Academic of science

PHYSICS-MATHS BY P'JUE

PRE FLIGHT

MIDTERM

SERIES 1

PHYSICS 1

- (1) Vector (1 ข้อ)
 - (1) Graph $v-t$ ✓
- (2) Force & Motion
 - (2) นิยาม
 - (3) สัมพัทธ์
 - (4) ระบบมวล, รั้งมวล limit ตามสูตร
- (3) Work & Mom
 - (1) Graph $w = \int F \cdot dr$ ✓
 - (2) COE+COM
 - (3) พิก 2D
- (4) System of Particle (1 ข้อ)
- (5) Rigid body
 - (1) จา I แทน
 - (2) $I_{ext} = I_{int}$

**BELIEVE
in
YOURSELF**

PSU INTANIA

1-2559

P'JUE

Note ไม้เมตรวัดเชิงมุมรอบจุด O : L or L_{sys}
ไม้เมตรวัดเชิงมุมรอบจุด cm : L_{int}

คิดน้อย

PRE FLIGHT MIDTERM PHYSICS 1-2559 (SERIES 1)

ข้อ 1 แรง $\vec{F} = 2\hat{e}_x - \hat{e}_y + 3\hat{e}_z$ N กระทำกับมวล 2 kg ซึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $\vec{r}_1 = \hat{e}_x + 3\hat{e}_y + 2\hat{e}_z$ m แล้วทำให้วัตถุหยุดที่ตำแหน่ง $\vec{r}_2 = 4\hat{e}_x + 3\hat{e}_y - 5\hat{e}_z$ m จงหา

ก. $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

ข. ขนาดของ $\vec{F}$

ค. ขนาดของ $\Delta\vec{r}$

ง. งานของแรง $\vec{F}$ ($W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$)

จ. มุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{F}$ กับ $\Delta\vec{r}$

* ฉ. ไตเรกชันโคไซน์ของ $\vec{F}$ และ $\Delta\vec{r}$ (หรืออาจถามมุม ระหว่าง)

* ช. ถ้าแรง $\vec{F}$ นี้กระทำกับมวลที่ระยะ $\Delta\vec{r} = \hat{e}_x + 2\hat{e}_y - 1.5\hat{e}_z$ m จงหาทอร์กของแรงนี้รอบจุด (2, 4, 3) ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$)

(15 คะแนน)

ก) $\Delta\vec{r} = (4\hat{e}_x + 3\hat{e}_y - 5\hat{e}_z) - (\hat{e}_x + 3\hat{e}_y + 2\hat{e}_z) = 3\hat{e}_x - 7\hat{e}_z$ m #

ข) $|\vec{F}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14} = 3.74$ N #

ค) $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{3^2 + (-7)^2} = \sqrt{58} = 7.62$ m #

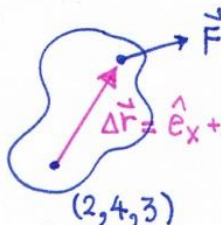
ง) $W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (2\hat{e}_x - \hat{e}_y + 3\hat{e}_z) \cdot (3\hat{e}_x - 7\hat{e}_z) = 6 + 0 - 21 = -15$ J #

จ) $\cos\theta = \frac{\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}}{|\vec{F}| |\Delta\vec{r}|} = \frac{-15}{\sqrt{14} \sqrt{58}} = -0.5264 \sim \theta = 121.8^\circ$ #

ฉ) $(\cos\alpha_{\vec{F}}, \cos\beta_{\vec{F}}, \cos\gamma_{\vec{F}}) = \left(\frac{F_x}{|\vec{F}|}, \frac{F_y}{|\vec{F}|}, \frac{F_z}{|\vec{F}|} \right) = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$

$(\cos\alpha_{\Delta\vec{r}}, \cos\beta_{\Delta\vec{r}}, \cos\gamma_{\Delta\vec{r}}) = \left(\frac{\Delta r_x}{|\Delta\vec{r}|}, \frac{\Delta r_y}{|\Delta\vec{r}|}, \frac{\Delta r_z}{|\Delta\vec{r}|} \right) = \left(\frac{3}{\sqrt{58}}, 0, \frac{-7}{\sqrt{58}} \right)$

ช)



$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

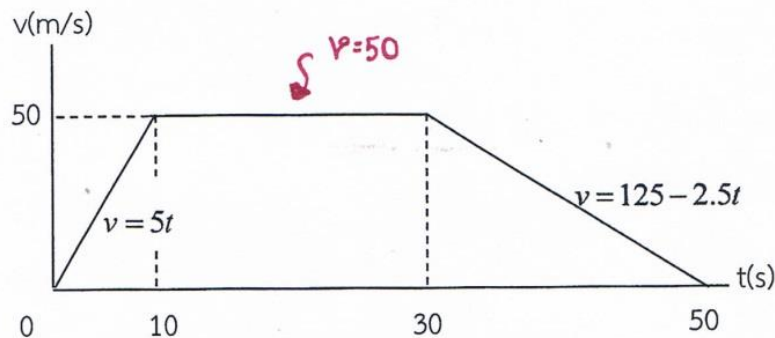
$\Delta\vec{r} = \hat{e}_x + 2\hat{e}_y - 1.5\hat{e}_z$

$$= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 1 & 2 & -1.5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$= \begin{vmatrix} 2 & -1.5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \hat{e}_x - \begin{vmatrix} 1 & -1.5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \hat{e}_y + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \hat{e}_z$

$\vec{\tau} = 4.5\hat{e}_x - 6\hat{e}_y - 5\hat{e}_z$ Nm #

- ข้อ 2 จากกราฟระหว่างความเร็วกับเวลา ($v-t$) ของเครื่องบินที่กำลังแล่นบนทางวิ่งในแนวเส้นตรง จงหาสมการ พร้อมทั้งเขียนกราฟของการกระจัดกับเวลา ($s-t$) และ ความเร่งกับเวลา ($a-t$) ของเครื่องบินลำนี้ โดยที่ $t = 0 \text{ s}$, $s = 20 \text{ m}$ (15 คะแนน)



$$0 \leq t < 10 \text{ s}$$

$$v = 5t$$

$$ds = v dt \quad a = \frac{dv}{dt}$$

$$\int_{20}^s ds = \int_0^t (5t) dt \quad \boxed{a = 5 \text{ m/s}^2}$$

$$s - 20 = 2.5t^2$$

$$\boxed{s = 2.5t^2 + 20 \text{ m}}$$

$$s(10\text{s}) = 270 \text{ m}$$

$$10 \leq t < 30 \text{ s}$$

$$v = 50$$

$$\int_{270}^s ds = \int_{10}^t 50 dt \quad \boxed{a = 0 \text{ m/s}^2}$$

$$s - 270 = 50t \Big|_{10}^t$$

$$\boxed{s = 50t - 230}$$

$$s(30\text{s}) = 1270 \text{ m}$$

$$30 \leq t \leq 50 \text{ s}$$

$$v = 125 - 2.5t$$

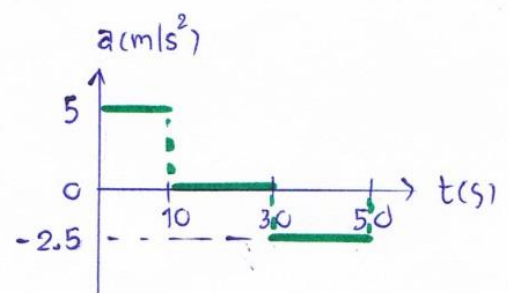
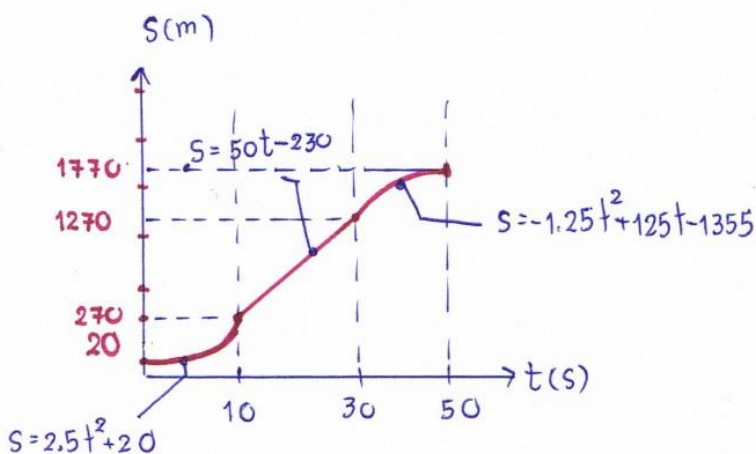
$$\int_{1270}^s ds = \int_{30}^t (125 - 2.5t) dt \quad \boxed{a = -2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$s - 1270 = (125t - 1.25t^2) \Big|_{30}^t$$

$$s - 1270 = (125t - 1.25t^2) - (3750 - 1125)$$

$$\boxed{s = -1.25t^2 + 125t - 1355 \text{ m}}$$

$$s(50\text{s}) = 1770 \text{ m}$$

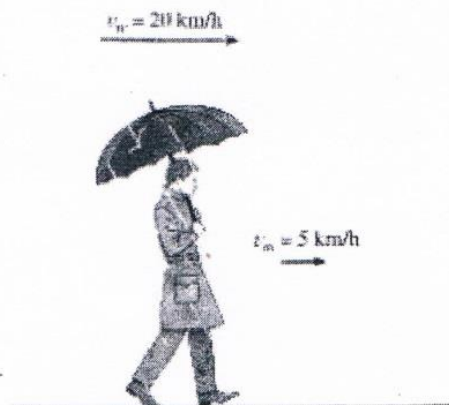


ข้อ 3 เวกเตอร์บอกตำแหน่งเป็นเมตรของจุด ๆ หนึ่ง ซึ่งเคลื่อนที่ตามส่วนโค้งเมื่อเวลา t วินาที เป็นไปตามความสัมพันธ์ $x = 2 \sin 2t \text{ m}$, $y = -2 \cos 2t \text{ m}$ และ $z = -2t^3 \text{ m}$ สมการ จงหาค่าของ

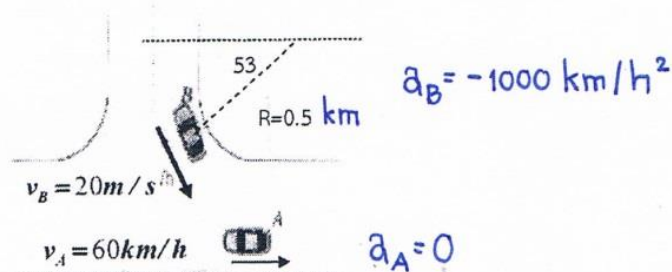
1. $\vec{v}$, v , $\vec{a}$, a_T , a_N , R , $\hat{e}_T$ และ $\hat{e}_N$

เมื่อเวลา $t = 2$ วินาทีพร้อมกับหา $\langle \vec{v}(1-3s) \rangle$ และ $\langle \vec{a}(2-4s) \rangle$

ข้อ 4 ชายคนหนึ่งเดินด้วยความเร็ว 5 km/h ไปในทิศเดียวกับลมซึ่งพัดด้วยความเร็ว 20 km/h ถ้าฝนตกลงมาด้วยความเร็ว 7 km/h จงหาความเร็วของฝน เทียบกับชายคนนี้ (8 คะแนน)



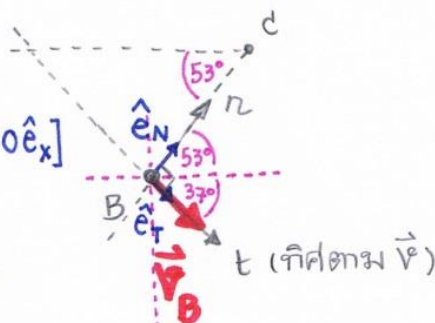
- ข้อ 5 จากรูปรถ A และ B เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 60 km/h และ 20 m/s ตามลำดับ ถ้ารถ B ลดอัตราเร็ว 1000 km/h^2 ขณะที่รถ A มีความเร็วคงที่ $\vec{v}_{BA}, \hat{e}_{TB}, \hat{e}_{NB}, \vec{a}_{TB}, \vec{a}_{NB}, \vec{a}_B, \vec{a}_{BA}$



$$(1) \vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

$$= [(72 \cos 37^\circ) \hat{e}_x - (72 \sin 37^\circ) \hat{e}_y] - [60 \hat{e}_x]$$

$$= -2.4 \hat{e}_x - 43.2 \hat{e}_y \text{ km/h} \quad \#$$



$$(2) \hat{e}_{TB} = (\cos 37^\circ) \hat{e}_x - (\sin 37^\circ) \hat{e}_y = 0.8 \hat{e}_x - 0.6 \hat{e}_y \quad \#$$

แตก 1 หน่วย

$$(3) \hat{e}_{NB} = (\cos 53^\circ) \hat{e}_x + (\sin 53^\circ) \hat{e}_y = 0.6 \hat{e}_x + 0.8 \hat{e}_y \quad \#$$

$$(4) \vec{a}_{TB} = a_T \hat{e}_{TB} = -1000 (0.8 \hat{e}_x - 0.6 \hat{e}_y) = -800 \hat{e}_x + 600 \hat{e}_y \text{ km/h}^2 \quad \#$$

$$(5) \vec{a}_{NB} = a_N \hat{e}_{NB} = 10368 (0.6 \hat{e}_x + 0.8 \hat{e}_y) = 6220.8 \hat{e}_x + 8294.4 \hat{e}_y \text{ km/h}^2 \quad \#$$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{72^2}{0.5} = 10368$$

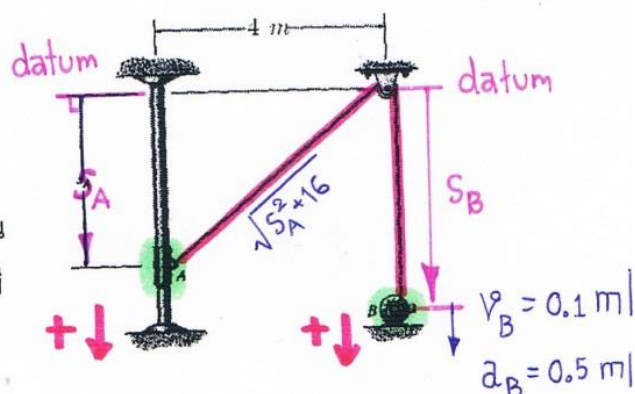
$$(6) \vec{a}_B = \vec{a}_T + \vec{a}_N = 5420.8 \hat{e}_x + 8894.4 \hat{e}_y \text{ km/h}^2 \quad \#$$

$$(7) \vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = 5420.8 \hat{e}_x + 8894.4 \hat{e}_y \text{ km/h}^2 \quad \#$$

ข้อ 6 จากรูปขณะปลายเชือก B กำลังเคลื่อนที่ลงด้วยความเร็ว 10 cm/s และความเร่งคงที่ 50 cm/s^2 ในทิศลงอยู่

ปลอก A จะอยู่ตำแหน่ง $s_A = 3 \text{ m}$

- 1) จงหาความเร็วและความเร่งของปลอกเหล็ก A ขณะนั้น
- 2) การกระจัดของปลอกเหล็ก A เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที



$$s_B + \sqrt{s_A^2 + 16} = L$$

$$s_A^2 + 16 = (L - s_B)^2 \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{d(1)}{dt}; 2s_A v_A = \frac{d}{dt}(L - s_B)^2 \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{d(2)}{dt}; s_A a_A + v_A^2 = -[(L - s_B) a_B + v_B^2] \quad \text{--- (3)}$$

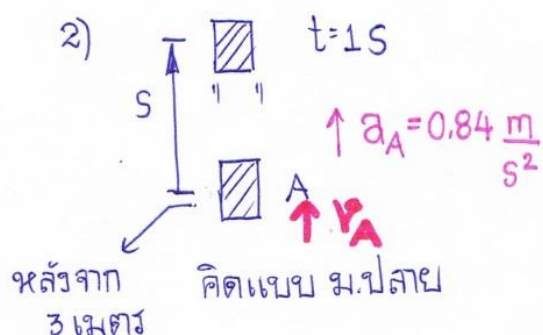
$$s_A a_A + v_A^2 = -(L - s_B) a_B + v_B^2 \quad \text{--- (3)}$$

$$1) \text{ จาก (2); } 3v_A = 5(-0.1)$$

$$v_A = -0.167 \text{ m/s} \rightarrow v_A = 0.17 \text{ m/s} \uparrow \#$$

$$\text{จาก (3); } 3a_A + 0.17^2 = -5(0.5) + 0.1^2$$

$$a_A = -0.84 \text{ m/s}^2 \rightarrow a_A = 0.84 \text{ m/s}^2 \uparrow \#$$

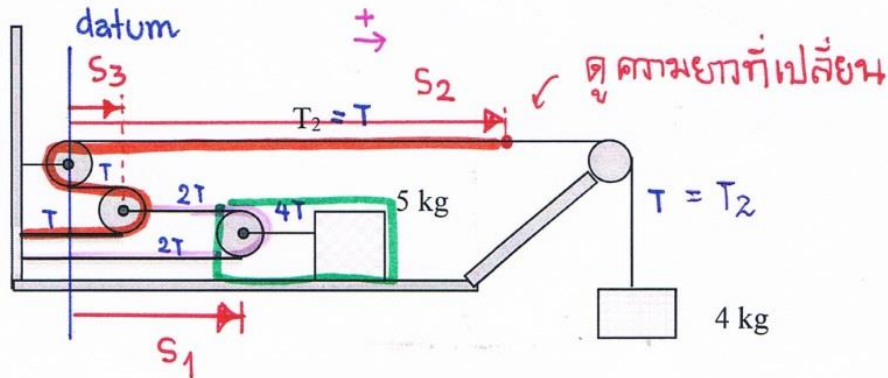


$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$= 0.17(1) + \frac{1}{2}(0.84)1^2$$

$$s = 0.59 \text{ m} \#$$

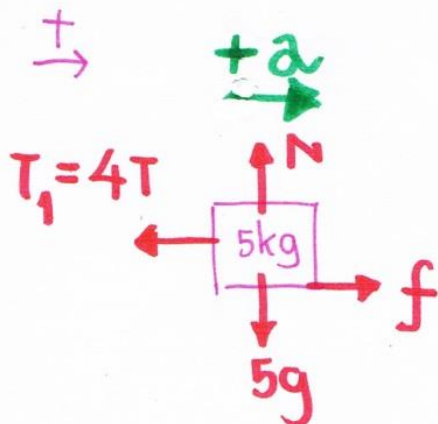
ข้อ 7 จากรูปเมื่อปล่อยให้มวลเคลื่อนที่ จงหาความตึงของเชือก T_2 และความเร่งของมวล 5 kg
กำหนดพื้นมีสัมประสิทธิ์ความเสียดทานเท่ากับ 0.2



$$L_1 = S_2 + 2S_3 \rightarrow 0 = a_2 + 2a_3 \quad \text{--- (1)}$$

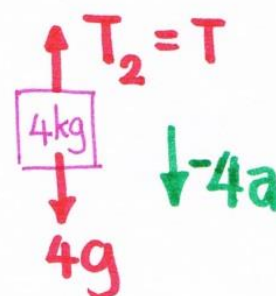
$$L_2 = S_1 + (S_1 - S_3) \rightarrow 0 = 2a_1 - a_3 \quad \text{--- (2)}$$

$$2 \times (2) + (1); \quad 4a_1 + a_2 = 0$$



$$\Sigma F = ma$$

$$f - 4T = 5a \quad \text{--- (1)}$$



$$\Sigma F = ma$$

$$4g - T = 4(-4a) \quad \text{--- (2)}$$

$$\begin{aligned} &\text{ให้ } T_2 = T \\ &\quad T_1 = 4T \\ &\hline &\text{ให้ } a_1 = a \\ &\quad a_2 = -4a \end{aligned}$$

แทน (2) ใน (1);

$$\mu N - 4[4g + 16a] = 5a$$

$$0.2(5 \times 9.81) - 16(9.81) - 64a = 5a$$

$$69a = -147.15 \rightarrow a = -2.13 \text{ m/s}^2$$

$$(1) \text{ จาก (2); } 4(9.81) - T_2 = -16(-2.13) \rightarrow T_2 = 5.16 \text{ N } \#$$

$$(2) \quad a_{5\text{kg}} = 2.13 \text{ m/s}^2 \leftarrow \#$$

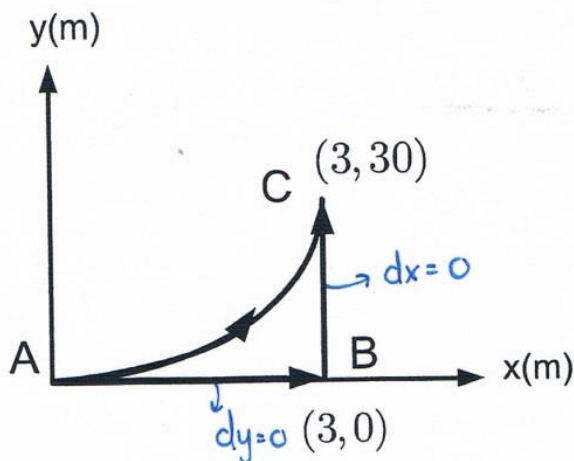
ข้อ 8 จงหางานของแรง $\vec{F} = xy\hat{e}_x + y^2\hat{e}_y$ N กระทำกับมวล 2 kg.

ทำให้มวลเปลี่ยนตำแหน่งจากจุด (0, 0) ไปยัง (3, 30) ตามเส้นทาง

ก. ABC

ข. พาราโบลาที่ผ่านจุด A และ C มีสมการเป็น $y = x^3 + x$

ค. แรง $\vec{F}$ เป็นแรงอนุรักษ์หรือไม่ เพราะเหตุใด (x, y มีหน่วยเป็นเมตร)



$$\begin{aligned}
 \text{ก) } W_{ABC} &= \int_{ABC} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_{ABC} xy dx + y^2 dy \\
 &= \int_{ABC} xy dx + \int_{ABC} y^2 dy \\
 &= \int_{AB} xy dx + \int_{BC} xy dx + \int_{AB} y^2 dy + \int_{BC} y^2 dy \\
 &= \int_0^{30} y^2 dy = \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^{30}
 \end{aligned}$$

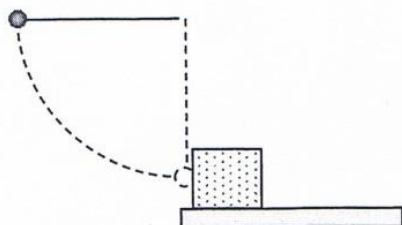
$$W_{ABC} = 9000 \text{ J} \#$$

$$\begin{aligned}
 \text{ข) } W_{AC} &= \int_{AC} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \left[dx\hat{e}_x + dy\hat{e}_y \right]^* \\
 &= \int_{AC} xy dx + y^2 dy \\
 &= \int_0^3 x(x^3+x) dx + \int_0^{30} y^2 dy \\
 &= \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 + \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^{30} \\
 &= \frac{3^5}{5} + 9 + 9000
 \end{aligned}$$

$$W_{AC} = 9057.6 \text{ J} \#$$

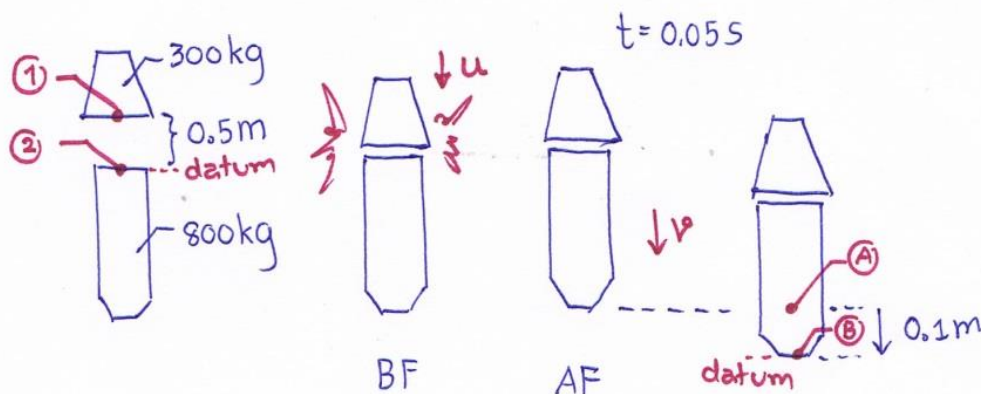
ค) ไม่เป็น เพราะ $W_{(ก)} \neq W_{(ข)} \#$

- ข้อ 9 ปล่อยมวล 4 kg ซึ่งผูกกับเชือกยาว 1.5 m ลงมาชน กล่อง มวล 6 kg ดังรูป จงหาความเร็วหลังชนของมวลทั้งสองและพลังงานรวมที่สูญเสีย กำหนดการชนมี $e = 0.6$ (10 คะแนน)



- ข้อ 10 ปล่องปืนจันมวล 300 กิโลกรัม ซึ่งอยู่สูง 0.5 เมตร เหนือปลายเสาเข็มมวล 800 กิโลกรัม ลงมาชนแล้วเคลื่อนที่ติดกันไปลึก 0.1 เมตร ถ้า ช่วงเวลาชนเท่ากับ 0.05 วินาที จงหา
- ก. ความเร็วของปืนจันก่อนชนและหลังชน ข. แรงที่เสาเข็มกระทำกับปืนจัน
- ค. แรงต้านของดินที่เสาเข็ม ง. พลังงานจลน์ที่สูญเสียไปชนกัน

(10 คะแนน)



(ก) ① → ②; $W_{F_N} = \Delta E_k + \Delta E_p$
 $E_1 = E_2$
 $mgh = \frac{1}{2}mu^2 \rightarrow u = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.81)(0.5)} = 3.13 \text{ m/s} \rightarrow \vec{u} = 3.13(-\hat{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}}$

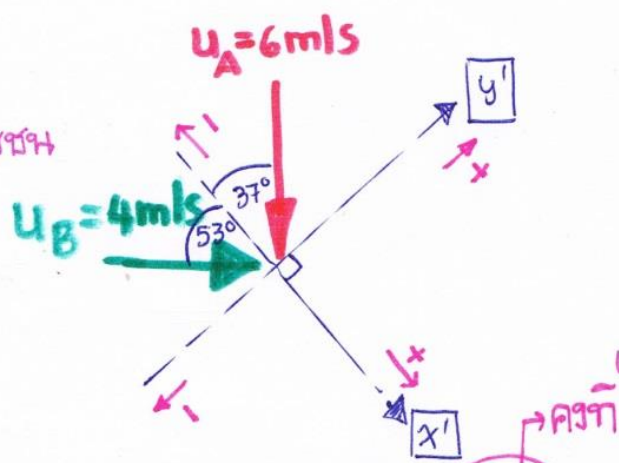
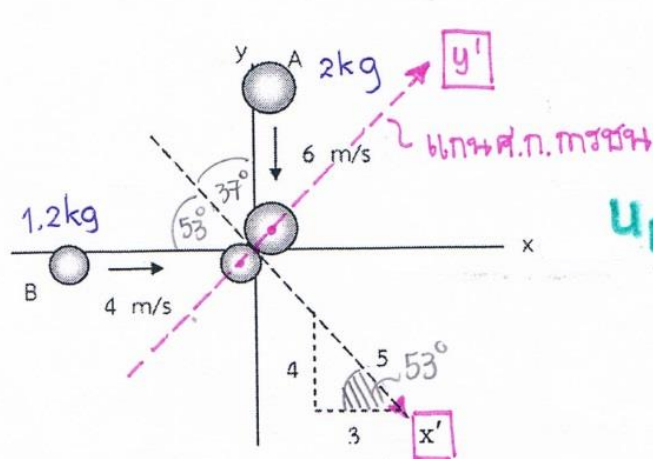
มวลชน; $+ \downarrow m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$
 $300(3.13) + 0 = (300 + 800)v$
 $v = 0.854 \text{ m/s} \rightarrow \vec{v} = 0.854(-\hat{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}}$ #

(ข) Impulse; $m\vec{v} = m\vec{u} + \sum \vec{F} \Delta t$
 $300(0.854) = 300(3.13) + N(0.05) \rightarrow N = -13,656 \text{ N}$ #

(ค) ④ → ⑤; $E_1 + W_{1 \rightarrow 2} = E_2$
 $mgh + \frac{1}{2}mv^2 - fs = 0$
 $1100(9.81)(0.1) + \frac{1}{2}(1100)(0.854)^2 = f(0.1)$
 $f = 14,802.24 \text{ N}$ #

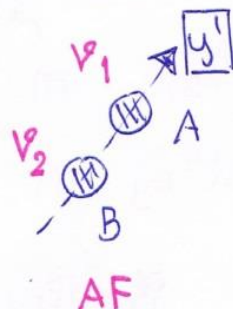
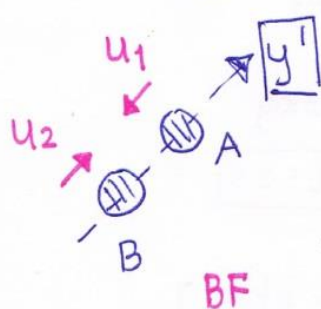
(ง) $\Delta E_k = \sum E_{kf} - \sum E_{ki} = \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \right)$
 $= \left(\frac{1}{2} \times 1100 \times 0.854^2 \right) - \left(\frac{1}{2}(300)3.13^2 + 0 \right) = -1068.41 \text{ J}$ #

ข้อ 11 A มีมวล 2.0 kg และ B มีมวล 1.2 kg เคลื่อนที่ชนกันบนพื้นราบเกลี้ยง มีความเร็วก่อนชนดังรูป การชนกันมีสัมประสิทธิ์คืนตัว (e) = 0.7 จงหา ความเร็ว หลังชนของมวลทั้งสอง



$$\vec{u}_A = (6 \cos 37^\circ)(+\hat{e}_{x'}) + (6 \sin 37^\circ)(-\hat{e}_{y'}) \text{ m/s} = 4.8\hat{e}_{x'} - 3.6\hat{e}_{y'} \text{ m/s}$$

$$\vec{u}_B = (4 \cos 53^\circ)(+\hat{e}_{x'}) + (4 \sin 53^\circ)(+\hat{e}_{y'}) \text{ m/s} = 2.4\hat{e}_{x'} + 3.2\hat{e}_{y'} \text{ m/s}$$



$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$2(-3.6) + 1.2(3.2) = 2v_1 + 1.2v_2$$

$$2v_1 + 1.2v_2 = -3.36 \quad (1)$$

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}$$

$$0.7 = \frac{v_2 - v_1}{-3.6 - 3.2}$$

$$v_2 - v_1 = -4.76 \quad (2)$$

$$v_1 = 0.735 \text{ m/s}, v_2 = -4.025 \text{ m/s}$$

$$\therefore \vec{v}_A = 4.8\hat{e}_{x'} + 0.74\hat{e}_{y'} \text{ m/s} \#$$

$$\vec{v}_B = 2.4\hat{e}_{x'} - 4.03\hat{e}_{y'} \text{ m/s} \#$$

Find!

(1, 2) ไม่มีรูป

$m_1 = 2 \text{ kg}$

$\vec{r}_1(t) = 3t^2 \hat{e}_x + (2t^3 + 2) \hat{e}_y \text{ m}$

$m_2 = 3 \text{ kg}$

$\vec{r}_2(t) = (t+1) \hat{e}_x - 5t^4 \hat{e}_y \text{ m}$

ห. t = 1 s

(1) $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$

(2) $\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)$

$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = 6t \hat{e}_x + 6t^2 \hat{e}_y$

$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \hat{e}_x - 20t^3 \hat{e}_y$

$\vec{r}_1 = 3\hat{e}_x + 4\hat{e}_y \text{ m}$

$\vec{r}_2 = 2\hat{e}_x - 5\hat{e}_y \text{ m}$

หาค่าต่อไป

ข้อ 12 ระบบประกอบด้วยมวล 2 ก้อน 2 และ 3 kg มีเวกเตอร์บอกตำแหน่งเป็น จงหา

ก. เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล ($\vec{r}_{cm}$)

ข. เวกเตอร์บอกตำแหน่งของมวล 3 kg เทียบกับจุดศูนย์กลางมวล ($\vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_{cm}$)

ค. ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล ($\vec{v}_{cm}$)

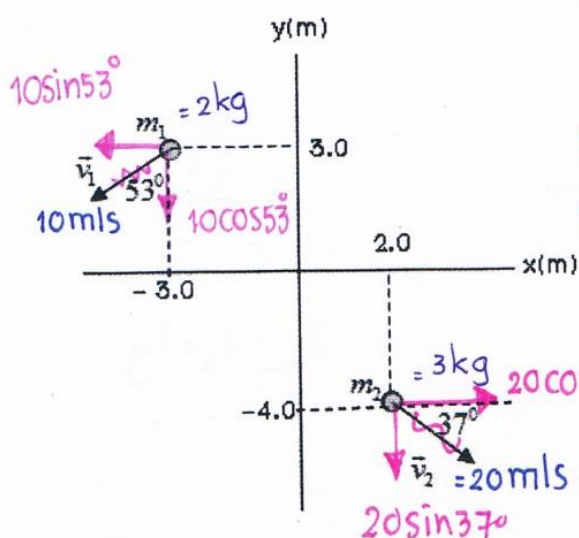
ง. ความเร็วของมวล 2 kg เทียบกับจุดศูนย์กลางมวล ($\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm}$)

จ. โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาค ($\vec{p} = M \vec{v}_{cm}$)

ฉ. โมเมนตัมเชิงมุมภายนอก และ ภายในของระบบ

ช. พลังงานจลน์ภายนอกและ ภายในของระบบ

cm $M(\vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm})$
 $\vec{L}^{ext}, \vec{L}^{int}$
 E_k^{ext}, E_k^{int} (20 คะแนน)
 $\frac{1}{2} M (\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm})$



2 kg: $\vec{r}_1 = -3\hat{e}_x + 3\hat{e}_y$ m

3 kg: $\vec{r}_2 = 2\hat{e}_x - 4\hat{e}_y$ m

$\vec{v}_1 = (10 \sin 53^\circ)(-\hat{e}_x) + (10 \cos 53^\circ)(-\hat{e}_y)$
 $= -8\hat{e}_x - 6\hat{e}_y$ m/s

$\vec{v}_2 = (20 \cos 37^\circ)\hat{e}_x + (20 \sin 37^\circ)(-\hat{e}_y)$
 $= 16\hat{e}_x - 12\hat{e}_y$ m/s

ก) $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$
 $= \frac{1}{5}[2(-3\hat{e}_x + 3\hat{e}_y) + 3(2\hat{e}_x - 4\hat{e}_y)]$

$\vec{r}_{cm} = -1.2\hat{e}_y$ m #

ข) $\vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_{cm} = (2\hat{e}_x - 4\hat{e}_y) - (-1.2\hat{e}_y)$
 $= 2\hat{e}_x - 2.8\hat{e}_y$ m #

ค) $\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)$
 $= \frac{1}{5}(2(-8\hat{e}_x - 6\hat{e}_y) + 3(16\hat{e}_x - 12\hat{e}_y))$
 $\vec{v}_{cm} = 6.4\hat{e}_x - 9.6\hat{e}_y$ m/s #

ง) $\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm} = (-8\hat{e}_x - 6\hat{e}_y) - (6.4\hat{e}_x - 9.6\hat{e}_y)$
 $= -14.4\hat{e}_x + 3.6\hat{e}_y$ m/s #

จ) $\vec{p} = M \vec{v}_{cm} = 5(6.4\hat{e}_x - 9.6\hat{e}_y) = 32\hat{e}_x - 48\hat{e}_y$ k

ฉ) $\vec{L} = \vec{L}^{ext} + \vec{L}^{int}$

1) $\vec{L} = m_1(\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) + m_2(\vec{r}_2 \times \vec{v}_2)$

$= 2[(-3\hat{e}_x + 3\hat{e}_y) \times (-8\hat{e}_x - 6\hat{e}_y)] + 3[(2\hat{e}_x - 4\hat{e}_y) \times (16\hat{e}_x - 12\hat{e}_y)]$
 $= 2[18\hat{e}_z - 24(-\hat{e}_z)] + 3[-24\hat{e}_z - 64(-\hat{e}_z)]$
 $= 204\hat{e}_z$ Js

2) $\vec{L}^{ext} = M(\vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm}) = 5[-1.2\hat{e}_y \times (6.4\hat{e}_x - 9.6\hat{e}_y)]$
 $= 5[-7.68(-\hat{e}_z)] = 38.4\hat{e}_z$ Js #

3) $\vec{L}^{int} = \vec{L} - \vec{L}^{ext} = 165.6\hat{e}_z$ Js #

9) $E_k = E_k^{ext} + E_k^{int}$

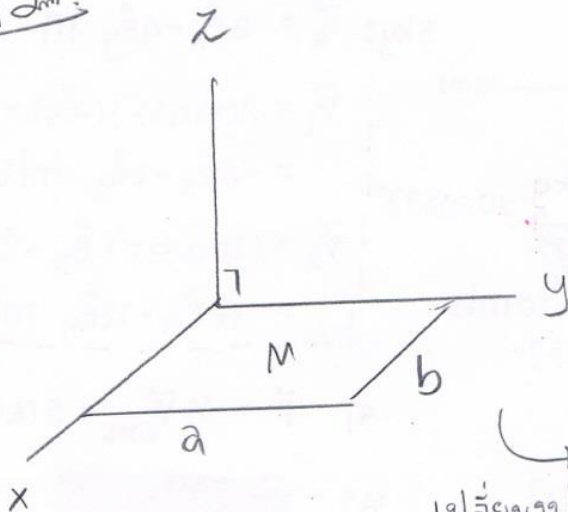
1) $E_k = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2$

$= \frac{1}{2} (2) [(-8)(-8) + (-6)(-6)] + \frac{1}{2} (3) [16^2 + (-12)^2]$
 $= 700 \text{ J}$

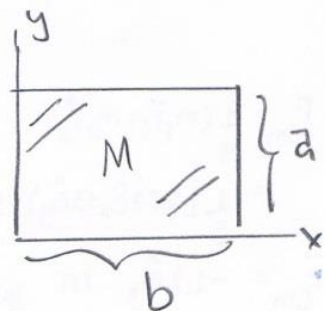
1) $E_k^{ext} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 = \frac{1}{2} (5) [6.4^2 + 9.6^2] = 332.8 \text{ J}_\#$

1) $E_k^{int} = E_k - E_k^{ext} = 367.2 \text{ J}_\#$

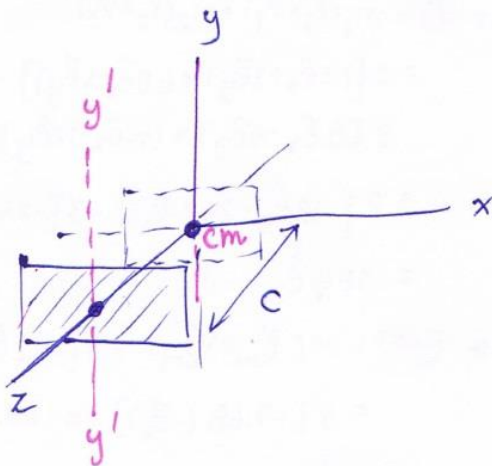
I_{cm} ?



$I_z = I_x + I_y$

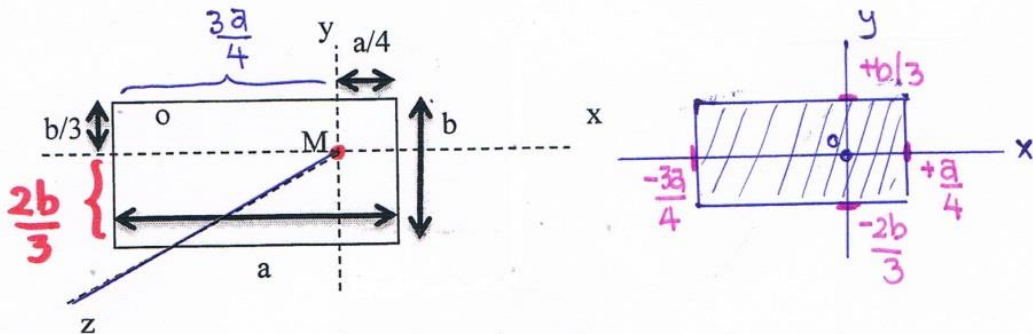


เปลี่ยนรูป

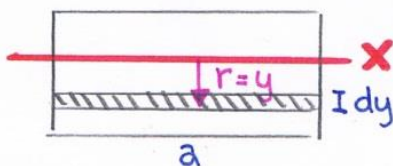


$I_{y'y'} = I_{cm} + m c^2$

- ข้อ 13 จากรูปจงแสดงวิธีการหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน x, y และ z ของ แผ่นโลหะสม่ำเสมอ กว้าง $a = 30$ cm ยาว $b = 60$ cm มวลเท่ากับ 5 kg (10 คะแนน)



(1) $I_x = \int r^2 dm$

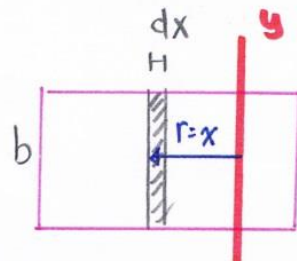


step1 $dm = \sigma dA$
 $= \sigma (a dy)$

step2 $I_x = \int y^2 \sigma a dy$
 $= \sigma a \int_{-2b/3}^{b/3} y^2 dy$
 $= \sigma a \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-2b/3}^{b/3}$
 $= \frac{M}{ab} \times \frac{a}{3} \left[\left(\frac{b}{3} \right)^3 - \left(-\frac{2b}{3} \right)^3 \right]$
 $= \frac{M}{3b} \left[\frac{b^3}{27} + \frac{8b^3}{27} \right] = \frac{1}{9} M b^2$

$\therefore I_x = \frac{1}{9} (5) (0.6)^2 = 0.2 \text{ kg.m}^2$

(2) I_y



step1 $dm = \sigma (b dx)$

step2 $I_y = \int x^2 \sigma b dx$
 $= \sigma b \int_{-3a/4}^{a/4} x^2 dx$
 $= \sigma b \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-3a/4}^{a/4}$
 $= \frac{M}{ab} \cdot \frac{b}{3} \left[\left(\frac{a}{4} \right)^3 - \left(-\frac{3a}{4} \right)^3 \right]$
 $= \frac{M}{3a} \left[\frac{a^3}{64} + \frac{27a^3}{64} \right] = \frac{7}{48} M a^2$

$\therefore I_y = \frac{7}{48} (5) (0.3)^2 = 0.0656 \text{ kg.m}^2$

(3) $I_z = I_x + I_y = 0.2656 \text{ kg.m}^2$

ข้อ 14 เชือกพันรอบทรงกระบอกสม่ำเสมอมวล $M = 2 \text{ kg}$ รัศมี 15 cm ปลายด้านหนึ่งผูกติดกับเพดาน
ดังรูป เมื่อปล่อยให้เริ่มเคลื่อนที่จากหยุดนิ่งทรงกระบอกจะหมุนเนื่องจากเชือกคลายตัว จงหา

ก. ความเร่งเชิงเส้นของศูนย์กลางมวล

$$a = a_{cm}$$

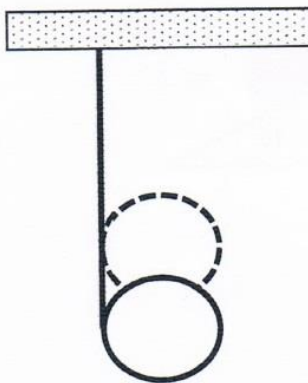
ข. ความเร่งเชิงมุมของทรงกระบอก

$$\alpha$$

ค. ความเร็วเชิงเส้นและความเร็วเชิงมุมของทรงกระบอกเมื่อตกลงมาได้ระยะ 2 เมตร

$$v, \omega$$

ง. แรงตึงเชือก T



$$M = 2 \text{ kg}$$

(10 คะแนน)

$$R = 15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m}$$

หมุน + เลื่อน

FBD

T



$$2g = 19.62 \text{ N}$$

จำ

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$= \frac{1}{2}(2)(0.15)^2$$

$$I = 0.0225 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$$

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = I\vec{\alpha}$$

$$19.62 - T = 2a \quad \text{--- ①}$$

$$T(0.15) = 0.0225\alpha \quad \text{--- ②}$$

$$L: \alpha(0.15)$$

จาก ②; $(19.62 - 0.3\alpha)0.15 = 0.0225\alpha$

$$19.62 - 0.3\alpha = 0.15\alpha$$

$$19.62 = 0.45\alpha \rightarrow \alpha = 43.6 \text{ rad/s}^2$$

ก) $a = \alpha(0.15) = 6.54 \text{ m/s}^2$ #

ข) $\alpha = 43.6 \text{ rad/s}^2$ #

ง) จาก ②; $T = \frac{0.0225\alpha}{0.15} = 6.54 \text{ N}$ #

ค) $v^2 = u^2 + 2as$

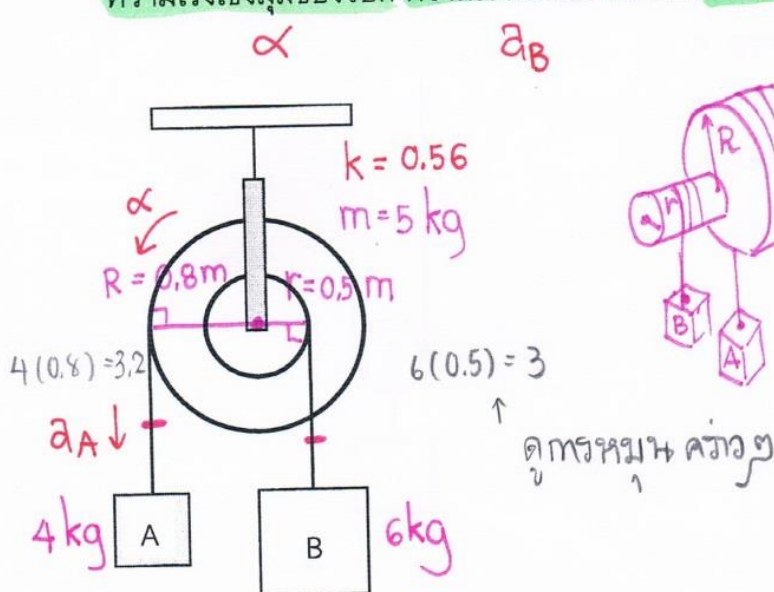
$$v^2 = 2(6.54)2$$

$$v = 5.11 \text{ m/s}$$

$$\omega R = 5.11$$

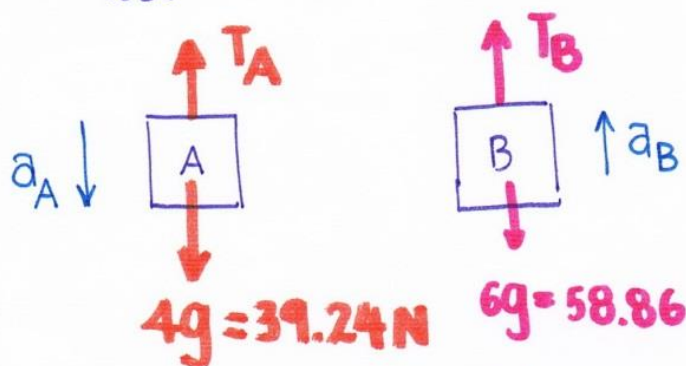
$$\omega = \frac{5.11}{0.15} = 34.07 \text{ rad/s}$$

ข้อ 12 รอกมวล 5 kg รัศมีวงใน 0.5 m รัศมีวงนอก 0.8 m รัศมีใจเรชั่น 0.56 m มีมวล A = 4 kg แขนงที่
ขอบด้านนอกและมวล B = 6 kg แขนงที่ขอบด้านใน ดังรูป ถ้าไม่คิดแรงเสียดทานที่จุดหมุน จงหา
ความเร่งเชิงมุมของรอก ความเร่งของมวล B และความตึงของเชือก A (10 คะแนน)



$$I_{\text{รอก}} = mk^2 = 5(0.56)^2 = 1.568 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

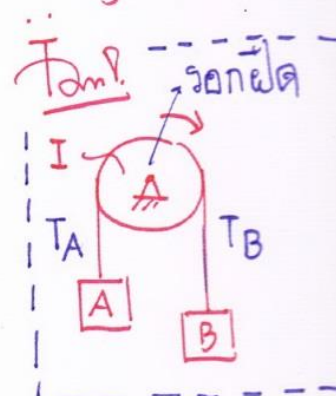
FBD (เพื่อ set สมการ Newton)



$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{a}$$

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{a}$$

$$\sum \vec{\tau}^{\text{ext}} = I\vec{\alpha}$$



พยายาม
หา α
ง่าย

$$39.24 - T_A = 4a_A \quad (1) \quad T_B - 58.86 = 6a_B \quad (2) \quad T_A(0.8) - T_B(0.5) = 1.568\alpha \quad (3)$$

$$\text{จาก (3); } 8[39.24 - 3.2\alpha] - 5[58.86 + 3\alpha] = 1.568\alpha$$

$$313.92 - 25.6\alpha - 294.3 - 15\alpha = 1.568\alpha$$

$$19.62 = 56.28\alpha$$

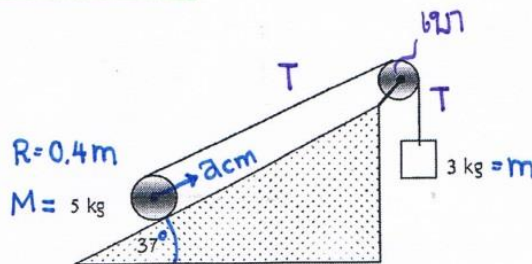
$$\text{จาก (1); } T_A = 39.24 - 4(\alpha \times 0.8)$$

$$T_A = 38.12 \text{ N}$$

$$\alpha = 0.35 \text{ rad/s}^2$$

$$a_B = \alpha(0.5) = 0.175 \text{ m/s}^2$$

ข้อ 16 ล้อตันมวล 5 kg รัศมี 0.4 m มีเชือกเบาพันรอบแล้วนำไปวางบนพื้นเอียงฝืดทำมุม 37° กับแนวราบ ปลายหนึ่งของเชือกผูกกับมวล 3 kg พาดบนรอกเบา ถ้าถือว่าทรงกระบอกเคลื่อนที่แบบกลิ้ง จงหาแรงตึงเชือก ความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลของล้อตัน และแรงเสียดทานที่น้อยที่สุดระหว่างผิวของล้อตันกับพื้นเอียง

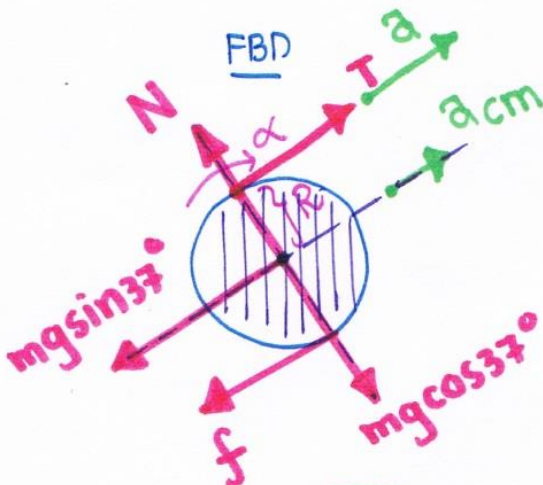


$$I_{\text{ล้อ}} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$= \frac{1}{2}(5)(0.4)^2$$

$$= 0.4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$a = \alpha R$



$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}_{\text{cm}}$$

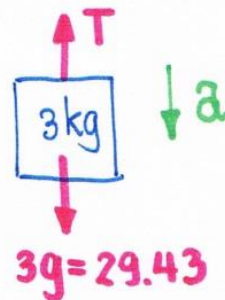
$$T - f - mg \sin 37^\circ = m a_{\text{cm}}$$

$$T - f - 29.43 = 5 a_{\text{cm}} \quad \text{--- (2)}$$

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I \alpha$$

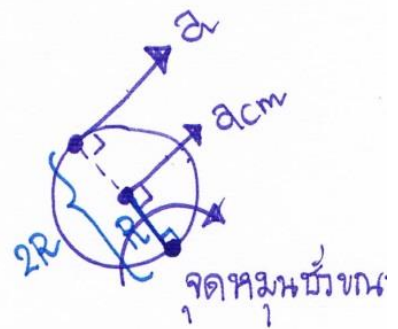
$$TR + fR = 0.4 \frac{a}{R}$$

$$T + f = 2.5 a \quad \text{--- (3)}$$



$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$$

$$29.43 - T = 3a \quad \text{--- (1)}$$



$$\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\text{ขอบ}}$$

$$\frac{a_{\text{cm}}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$a = 2a_{\text{cm}}$

fixed

$$2 \times (1) + (2) + (3); [2(29.43) - 2T] + [T - f - 29.43] + [T + f] = 6a + \frac{5}{2}a + 2.5a$$

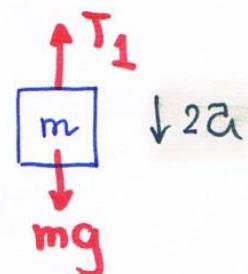
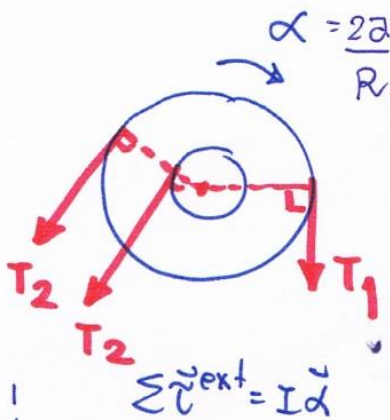
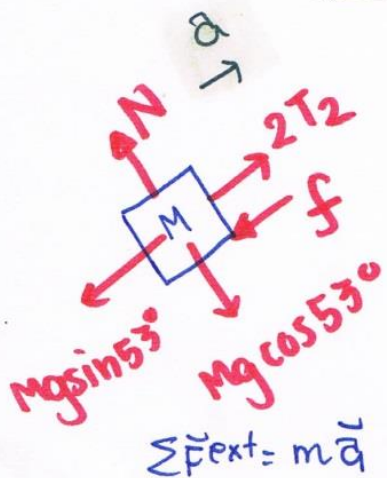
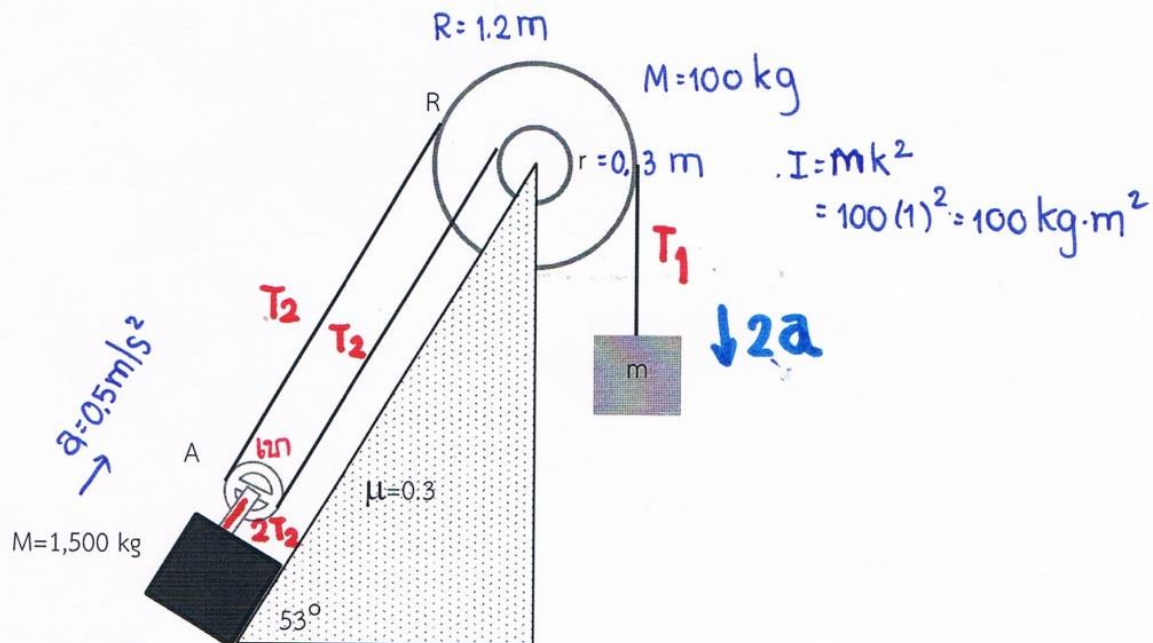
$$29.43 = 11a$$

$a = 2.68 \text{ m/s}^2$

จาก (1); (1) $T = 21.39 \text{ N}$ # (2) $a_{\text{cm}} = \frac{a}{2} = 1.34 \text{ m/s}^2$ #

จาก (3) (3) $f = -14.69 \text{ N} \rightarrow f = 14.69 \text{ N}$ #

ข้อ 17 จากรูป ถ้า ล้อและเพลามวล $M = 100 \text{ kg}$ มีรัศมีภายนอก R และภายใน r โดย $R = 4r = 1.2 \text{ m}$ และรัศมีไจเรชัน $k = 1.0 \text{ m}$ จงหาขนาดของมวล m ที่สามารถดึงมวล $M = 1,500 \text{ kg}$ ขึ้นไปตามพื้นเอียงปัดที่มี $\mu = 0.3$ โดยที่ มวล M มีความเร่ง 0.5 m/s^2



$$2T_2 - 1500(9.81)\frac{4}{5} - f = 1500a$$

$$2T_2 - 1200(9.81) - \mu N = 750$$

$$2T_2 - 11772 - 0.3Mg\cos 53^\circ = 750$$

$$T_2 = 7585 \text{ N}$$

$$T_1 R - T_2 R - T_2 r = 100 \left(\frac{2a}{R} \right)$$

$$T_1(1.2) - T_2(1.2) - T_2(0.3) = 200 \frac{a}{1.2}$$

$$T_1(1.2) - T_2(1.5) = \frac{200}{1.2} a \quad \text{--- (2)}$$

$$T_1 = 9551 \text{ N}$$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$$

$$9.81m - T_1 = m(2a)$$

$$9.81m - T_1 = 2ma \quad \text{--- (3)}$$

$$m = 1084 \text{ kg} \quad \#$$