



Two Dimensional Motion

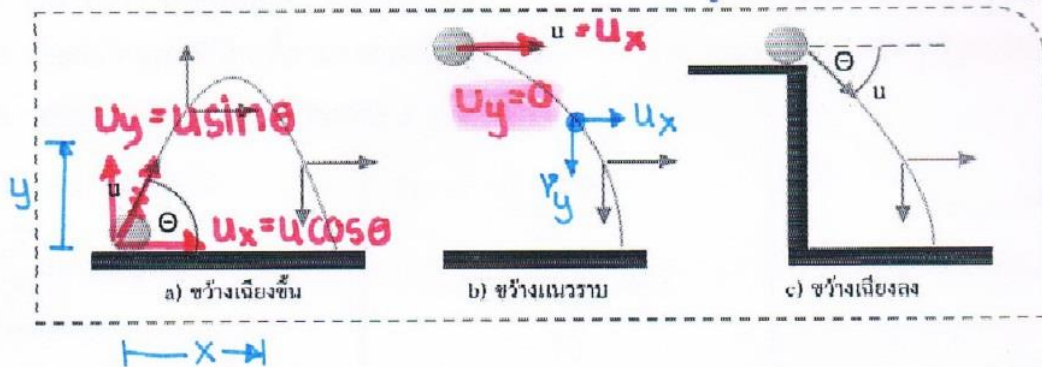
รูปแบบและหลักการคำนวณการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ (Projectile)

① รูปแบบของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ (การเคลื่อนที่วิถีโค้งรูปพาราโบลา) :

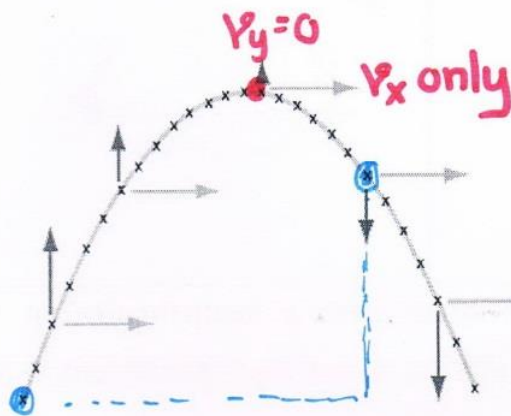
ถ้าพิจารณา แนวราบ → วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ ($a = 0$) $u_x = v_x$

แนวตั้ง → วัตถุจะเคลื่อนที่อย่างอิสระภายใต้แรงโน้มถ่วงโลก ($a = g$) มี 3 รูปแบบดังต่อไปนี้
 v_y เปลี่ยนแปลงไปเรื่อยๆ



② หลักการคำนวณการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ทุกรูปแบบ

พิจารณารูปแบบการเคลื่อนที่อย่างง่ายมีหลักการเข้าสมการคำนวณดังต่อไปนี้



① พิจารณาการเคลื่อนที่ของเงาแยกแกน

x : v คงที่ใช้สูตร $s_x = u_x t$; $a = 0$ (1)

y : มีความเร่ง g ใช้ 4 สูตรหา

$$\begin{aligned} v_y &= u_y + gt & ; & \quad s_y = u_y t + \frac{1}{2} gt^2 \\ s_y &= \left(\frac{u_y + v_y}{2} \right) t & ; & \quad v_y^2 = u_y^2 + 2gs_y \end{aligned} \quad \text{.....(2)}$$

↑ มักใช้หา t
↓ มักใช้คำนวณถึง max

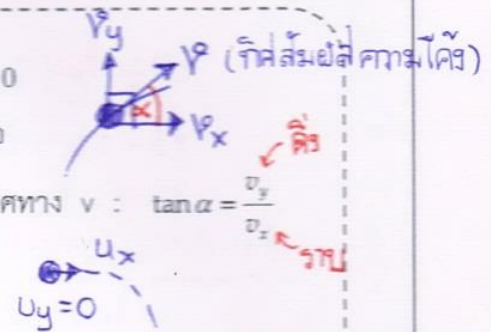
② ต้องเข้าใจว่าการเคลื่อนที่แนวราบและแนวตั้ง $t_x = t_y$ เพราะการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นพร้อมๆ กันเพียงแต่คิดแยกแกนกัน



TIP & TRICK



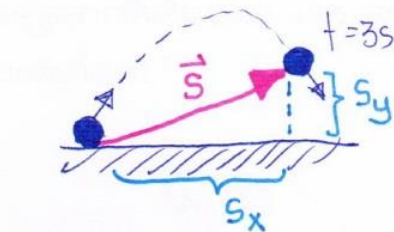
1. ณ ตำแหน่งสูงสุด $v \neq 0$ เนื่องจากมี v_x แต่ $v_y = 0$
2. ทุกๆ ตำแหน่งของการเคลื่อนที่จะมี $v_x = u_x$ เสมอ
3. ความเร็ว ณ ตำแหน่งใดๆ : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ทิศทาง v : $\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}$
4. การขว้างวัตถุในแนวราบ $u_x = u$ แต่ $u_y = 0$



Ex 1 วัตถุถูกยิงด้วยความเร็วต้น 25 m/s ในทิศทางมุม 37° กับแนวดิ่งจงหา

- 1.1 เวลาในการเคลื่อนที่ในอากาศทั้งหมด
- 1.2 ระยะสูงสุดที่วัตถุนี้สามารถเคลื่อนที่ได้
- 1.3 ระยะไกลสุดที่วัตถุนี้สามารถเคลื่อนที่ไปได้
- 1.4 ความเร็วของวัตถุที่วินาทีที่ 2
- 1.5 การกระจัดของวัตถุที่วินาทีที่ 3

$u_y = 25 \sin 53^\circ = 20 \text{ m/s}$
 $u_x = 25 \cos 53^\circ = 15 \text{ m/s}$



1.1) $t = \frac{2u \sin \theta}{g}$
 $= \frac{2(25) \sin 53^\circ}{10}$
 $t = 4 \text{ s}$ #

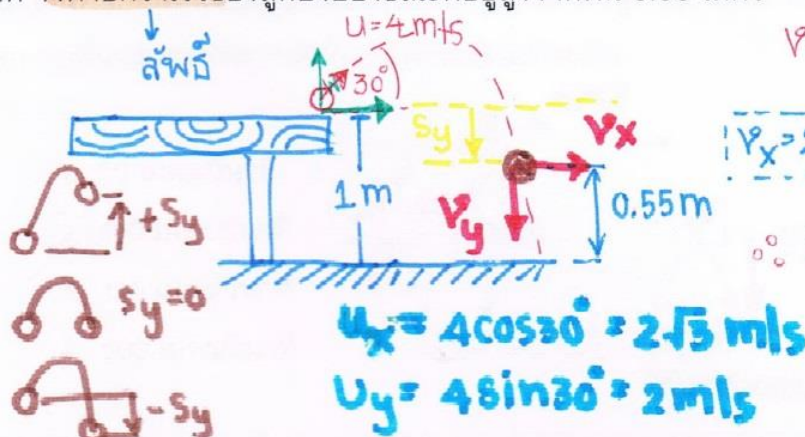
1.2) $y: v_y = u_y + 2gS_y$
 $0 = 20^2 - 20S_y$
 $S_y = 20 \text{ m}$ #

1.3) $x: S_x = u_x t$
 $S_x = 15(4)$
 $S_x = 60 \text{ m}$ #

1.4) $v_x = u_x = 15 \text{ m/s}$

1.5) $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = 15\sqrt{4^2 + 3^2} = 15\sqrt{25} = 15(5) = 75 \text{ m}$
 $S_x = u_x t = 15(3) = 45 \text{ m}$
 $S_y = u_y t + \frac{1}{2}gt^2 = 20(3) + \frac{1}{2}(10)(3)^2 = 60 + 45 = 105 \text{ m}$

Ex 2 ลูกปิงปองทำมุมเงย 30° องศา กับแนวระดับจากขอบโต๊ะซึ่งสูง 1 เมตร ด้วยอัตราเร็ว 4 เมตรต่อวินาที จงหาอัตราเร็วของลูกปิงปองขณะที่อยู่สูงจากพื้น 0.55 เมตร



$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
 $v_x = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$
 $v_y = 2 \text{ m/s}$
 $v = 5 \text{ m/s}$ #

$v_y^2 = u_y^2 + 2gS_y$
 $v_y^2 = 2^2 + 2(-10)(-0.45)$
 $v_y^2 = 13$

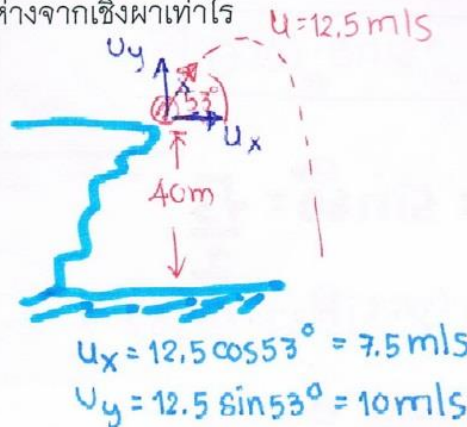
Ex 3 เมื่อปาก่อนหินจากหน้าผาสูง 40 เมตร ทำมุมเงย 53° กับแนวราบด้วยความเร็วต้น 12.5 เมตร/วินาที จงหาว่าก้อนหินตกถึงพื้นห่างจากเชิงผาเท่าไร

1. 15 เมตร

2. 20 เมตร

3. 30 เมตร

4. 40 เมตร



$$y: s_y = u_y t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$-40 = 10t - 5t^2$$

$$t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$(t-4)(t+2) = 0 \rightarrow t = 4, -2 \text{ s}$$

$$x: s_x = u_x t$$

$$s_x = 7.5(4) = 30 \text{ m}$$

Ex 4 ข้อความต่อไปนี้เกี่ยวกับการเคลื่อนที่วิถีโค้ง

- ✓ ก. แรงที่กระทำต่อวัตถุแต่ละตำแหน่งของการเคลื่อนที่ขนานกันเสมอ
- ✗ ข. แรงที่กระทำต่อวัตถุ จะตั้งฉากกับความเร็วของวัตถุเสมอ
- ✗ ค. ณ ตำแหน่งสูงสุดของการเคลื่อนที่วัตถุจะมีพลังงานศักย์โน้มถ่วงเพียงอย่างเดียว

ข้อใดถูกต้อง ได้แก่

$$E_p = mgh$$

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2$$

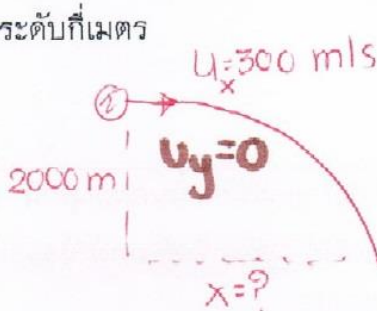
1. ข้อ ก. และ ข.

2. ข้อ ก. และ ค.

3. ข้อ ข. และ ค.

4. คำตอบเป็นอย่างอื่น

Ex 5 ลูกกระเบิดถูกปล่อยออกมาจากเครื่องบิน ซึ่งบินอยู่ในแนวระดับด้วยอัตราเร็ว 300 เมตรต่อวินาที และอยู่สูงจากพื้นดิน 2000 เมตร จงหาว่าลูกกระเบิดจะตกถึงพื้นดิน ณ ตำแหน่งที่ห่างจากจุดทิ้งระเบิดตามแนวระดับกี่เมตร



$$y: s_y = u_y t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$2000 = 0 + 5t^2$$

$$t = 20 \text{ s}$$

$$x: s_x = u_x t$$

$$= 300(20)$$

$$s_x = 6000 \text{ m}$$

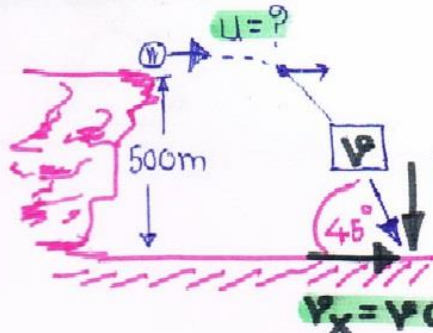
Ex 6 โยนหินก้อนหนึ่งออกไปในแนวระดับ จากหน้าผาสูง 500 เมตร ก้อนหินตกกระทบพื้นดินทำมุม 45° องศา กับพื้น จงหาความเร็วต้นในแนวระดับของก้อนหิน

1. 50 เมตร/วินาที

2. 100 เมตร/วินาที

3. 125 เมตร/วินาที

4. 500 เมตร/วินาที



$$y: v_y^2 = u_y^2 + 2gs_y$$

$$\left(v \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0 + 20(500)$$

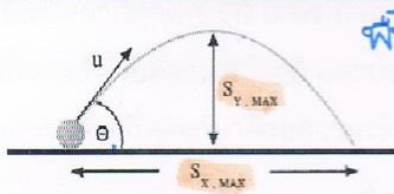
$$v = 100\sqrt{2} \text{ m/s}$$

$$u = v_x = v \cos 45^\circ$$

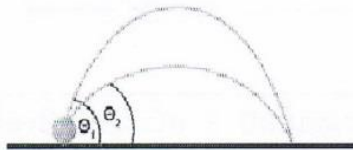
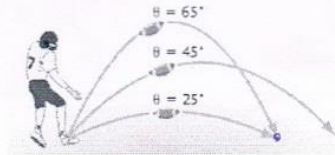
$$= 100\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 100 \text{ m/s}$$

สูตรลัดของโปรเจกไทล์ในรูปแบบอย่างง่ายและการคำนวณรูปแบบพิเศษ



พื้นที่ → พื้นที่



① $t = \frac{2u \sin \theta}{g}$

② $s_{x, \max} = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

③ $s_{y, \max} = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g}$

④ $\frac{s_{y, \max}}{s_{x, \max}} = \frac{1}{4} \tan \theta$

ไม่ต้อง
คิดค.ม.
ค่า g

⑤ การขว้างวัตถุให้ได้ $s_{x, \max}$ เกิดได้เมื่อ $\theta = 45^\circ$

⑥ การขว้างวัตถุให้ตกไกลเท่ากัน มีเงื่อนไขดังนี้

(6.1) u ต้องเท่ากัน

(6.2) $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$

😊 สังเกต เวลาที่ใช้จะไม่เท่ากัน เพราะมุมใหญ่ จะวิ่งอ้อมจึงใช้เวลามากกว่า

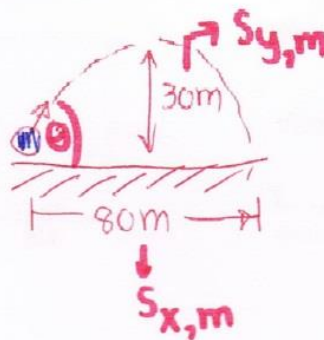
Ex 7 วิศวกรคนหนึ่งต้องการตีลูกกอล์ฟให้ข้ามต้นไม้สูง 30 เมตร และอยู่ห่างออกไป 40 เมตร ไปให้ลงหลุมพอดี โดยหลุมอยู่ห่างออกไป 80 เมตร ถามว่าต้องตีลูกกอล์ฟไปในทิศทางทำมุมเท่าใดกับพื้นดิน

1. $\tan^{-1} 3$

2. 45°

3. $\tan^{-1} \frac{3}{2}$

4. 60°



$\frac{s_{y, m}}{s_{x, m}} = \frac{1}{4} \tan \theta$

$\frac{30}{80} = \frac{1}{4} \tan \theta$

$\tan \theta = \frac{3}{2}$

$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{3}{2} \right)$

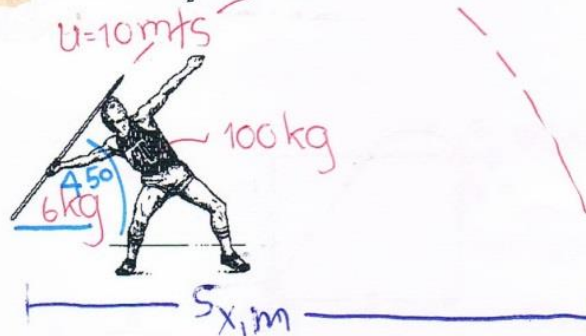
Ex 8 นักพุ่งแหลนน้าหนักมวล 100 กิโลกรัม พุ่งแหลนมวล 6 กิโลกรัม ออกไปด้วยความเร็ว 10 เมตร/วินาที เขาจะพุ่งได้ไกลที่สุดกี่ เมตร (ไม่คิดความสูงคน)

1. 4 เมตร

2. 7.5 เมตร

3. 10 เมตร

4. 12.5 เมตร

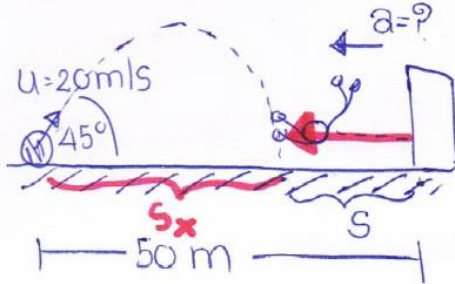


$s_{x, \max} = \frac{u^2 \sin(2\theta)}{g}$

$= \frac{10^2 \sin 90^\circ}{10}$

$= 10 \text{ m}$

Ex 9 นักฟุตบอลเตะลูกบอลไปด้วยความเร็ว 20 เมตรต่อวินาที ในทิศทางมุม 45 องศา กับพื้นสนามไปยังประตู ซึ่งห่างจากจุดเตะ 50 เมตร ถ้าในเวลาเดียวกันกับนักฟุตบอลเตะลูกบอล ผู้รักษาประตูซึ่งยืนที่ประตูได้วิ่งออกมาทันทีด้วยความเร็วคงที่ และปรากฏว่าผู้รักษาประตูรับลูกบอลได้พอดีที่ลูกบอลตกถึงพื้น จงหาว่าผู้รักษาประตูต้องวิ่งออกมาด้วยความเร็วคงที่เท่าไร



Projectile

$$t = \frac{2u \sin \theta}{g}$$

$$= \frac{2(20) \sin 45^\circ}{10}$$

$$= 2\sqrt{2} \text{ s}$$

$$S_x = u_x t = (20 \cos 45^\circ) 2\sqrt{2} = 40 \text{ m}$$

จ่ายประตู ?
 $s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$$(50 - 40) = \frac{1}{2}a(2\sqrt{2})^2$$

$$\therefore a = \frac{10}{4} = 2.5 \text{ m/s}^2$$

Ex 10 เครื่องบินทิ้งระเบิด B ปีนในแนวระดับสูงจากเป้าหมาย A 180 เมตร แนว BA ทำมุมกับแนวระดับ θ โดย $\theta = \arctan\left(\frac{1}{4}\right)$ จงหาความเร็วต้น u ของเครื่องบินในขณะนั้น เมื่อปล่อยระเบิดลงมาแล้ว ลูกระเบิดจะกระทบเป้า A พอดี

$$\tan \theta = \frac{1}{4}$$

$$y: s_y = u_y t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$180 = 0 + 5t^2$$

$$t = 6 \text{ s}$$

$$x: s_x = u_x t$$

$$720 = u(6)$$

$$u = 120 \text{ m/s}$$

$$= 120 \times \frac{18}{5}$$

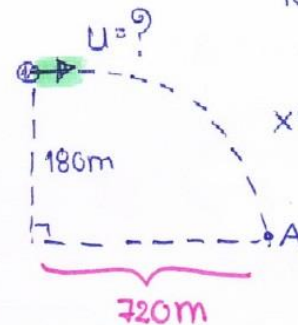
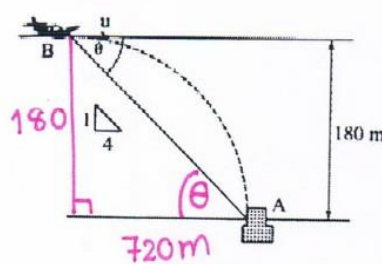
$$= 432 \text{ km/h}$$

1. 33.3 km/h

2. 120 km/h

3. 432 km/h

4. 720 km/h



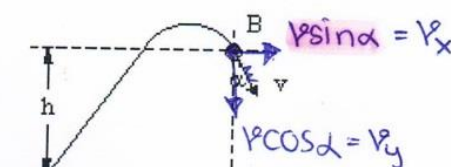
Ex 11 นักกีฬาบาสเกตบอลคนหนึ่งโยนลูกจากจุด A ไปยังห่วงที่จุด B ขณะที่ลูกบาสมาถึงที่จุด B ลูกบาสกำลังเคลื่อนที่ด้วย อัตราเร็ว v โดยมีทิศทางมุม α กับแนวดิ่ง ตามรูป เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของลูกบาสจาก A มา B คือเท่าใด (Ent'38)

1. $\frac{S}{v \sin \alpha}$

2. $\frac{h}{v \sin \alpha}$

3. $\frac{S}{v \cos \alpha}$

4. $\frac{h}{v \cos \alpha}$

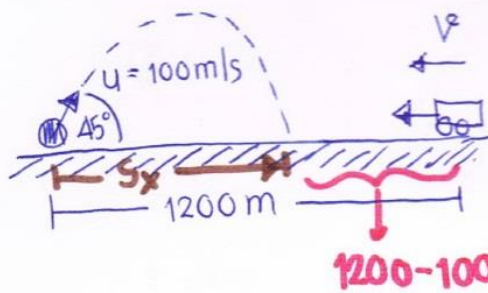


พิจารณาจาก A → B

$$x: S_x = u_x t$$

$$S = (v \sin \alpha) t \rightarrow t = \frac{S}{v \sin \alpha}$$

Ex 12 ยิงปืนใหญ่ด้วยความเร็วต้น 100 เมตรต่อวินาที ทำมุม 45 องศา กับแนวราบ ไปยังรถถังซึ่งกำลังแล่นตรงเข้ามาด้วยความเร็วคงที่ และขณะนั้นอยู่ห่างออกไปเป็นระยะ 1200 เมตร ถ้ากระสุนปืนกระทบเป้าหมายพอดี จงหาว่ารถถังซึ่งกำลังแล่นด้วยความเร็วเท่าใด ก่อนที่จะถูกทำลาย



รถถัง : $s = vt$ — ①

ปืนใหญ่ : $t = \frac{2u \sin \theta}{g}$

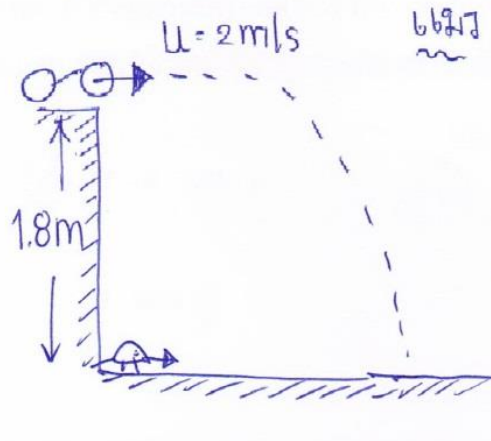
$= \frac{2(100) \sin 45^\circ}{10} = 10\sqrt{2} \text{ s}$

$S_x = u_x t = (100 \cos 45^\circ) 10\sqrt{2}$
 $= 1000 \text{ m}$

$\therefore 200 = v(10\sqrt{2}) \rightarrow v = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$ #

Ex 13 แมวอยู่บนตึกสูง 1.8 m เห็นหนูวิ่งออกจากรูตึกเดียวกันด้วยอัตราเร็ว 4 m/s แมวจึงกระโดดออกจากตึกนั้นด้วยอัตราเร็ว 2 m/s ในแนวนอน เมื่อถึงพื้นแมวจะห่างจากหนูเท่าใด

1. 1 m
2. 1.2 m
3. 1.5 m
4. 1.8 m



แมว $y: s_y = u_y t + \frac{1}{2} g t^2$

$1.8 = 0 + 5t^2$

$t = 0.6 \text{ s}$

x: $s_x = u_x t$

$= 2(0.6) = 1.2 \text{ m}$

หนู $S = vt = 4(0.6) = 2.4 \text{ m}$

$\Delta S = 1.2 \text{ m}$ #

HW

Ex 14 ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนพื้นสนามราบ เขาขว้างลูกบอลขึ้นไปในอากาศ ลูกบอลลอยอยู่ในอากาศนาน 4.0 วินาที โดยไม่คิดแรงต้านของอากาศ ถ้าลูกบอลไปได้ไกลในแนวระดับ 60.0 เมตร ความเร็วที่ใช้ขว้างลูกบอลมีค่าเท่าใด (Ent'37)

1. 15.0 m/s
2. 20.0 m/s
3. 25.0 m/s
4. 30.0 m/s

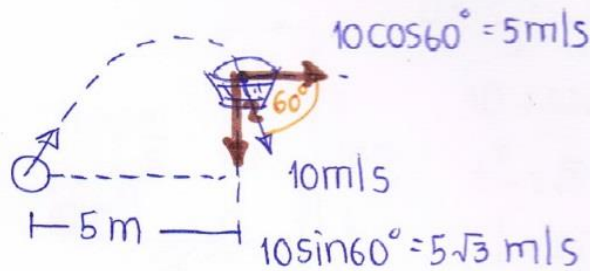
Ex 15 นักบาสเกตบอลยิงลูกจากระยะในแนวราบ 5 เมตร ห่างจากห่วง ขณะที่ลูกเข้าห่วง พบว่ามีความเร็ว 10 เมตร/วินาที ทำมุม 60° กับแนวราบ จงหาเวลาที่ลูกบาสเกตบอลใช้ในการเคลื่อนที่มาถึงห่วงในหน่วยวินาที (Ent Oct'42)

1. 1

2. $\sqrt{2}$

3. $\sqrt{3}/2$

4. $2/\sqrt{3}$



$$x: s_x = u_x t$$

$$5 = 5t$$

$$t = 1 \text{ s}$$

#

Ex 16 ยิงวัตถุขึ้นจากพื้นดินทำมุม θ กับแนวระดับ อัตราเร็วต้น u ถ้าต้องการยิงวัตถุอีกก้อนหนึ่งจากพื้นดินเพื่อให้ไปตกไกลเท่ากันแรก วัตถุก้อนหลังนี้ยังทำมุมกับแนวระดับและอัตราเร็วต้นเท่าใด (Ent'40)

1. $\frac{\theta}{2}$ และ $2u$

2. $90^\circ - \theta$ และ u

3. 2θ และ u

4. 2θ และ $\frac{u}{2}$



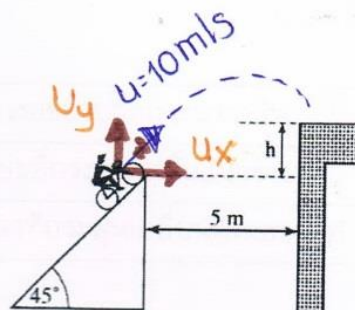
Ex 17 นักขี่จักรยานยนต์ผาดโผนต้องการซิ่งรถข้ามคลองซึ่งกว้าง 5 เมตร ไปยังฝั่งตรงข้าม ถ้าเขาซิ่งรถด้วยความเร็ว 10 เมตร/วินาที แล้วกระโดดข้ามได้พอดี จงหาความสูง h ในภาพนี้ในหน่วยเมตร

1. 1.8

2. 2.0

3. 2.5

4. 3.0



$$u_y = u_x = 10 \cos 45^\circ = 5\sqrt{2} \text{ m/s}$$

$$x: s_x = u_x t$$

$$5 = 5\sqrt{2} t$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ s}$$

$$y: s_y = u_y t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = 5\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} (-10) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

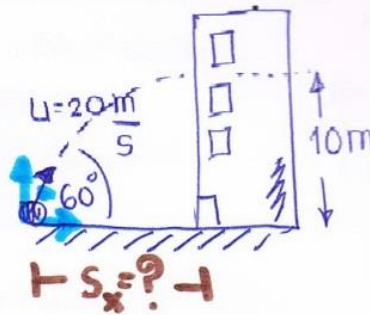
$$= 5 - 2.5 = 2.5 \text{ m}$$

#



Ex 18 ตำรวจดับเพลิงต้องการฉีดน้ำดับเพลิงซึ่งไหม้อาคารที่มีความสูง 10 เมตร ถ้าความเร็วต้นของน้ำที่ออกจากเครื่องฉีดน้ำเท่ากับ 20 เมตร/วินาที และทำมุม 60° กับแนวระดับ เขาจะต้องยืนห่างจากตัวอาคารเป็นระยะเท่าใด (ให้ $g = 10 \text{ m/s}^2$)

1. $10(3 - \sqrt{3})$ เมตร
2. $10(\sqrt{3} - 1)$ เมตร
3. $10(\sqrt{15} - 3)$ เมตร
4. $10(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ เมตร



$$u_x = 20 \cos 60^\circ = 10 \text{ m/s}$$

$$u_y = 20 \sin 60^\circ = 10\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$y = u_y t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$10 = 10\sqrt{3}t - 5t^2$$

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + 2 = 0$$

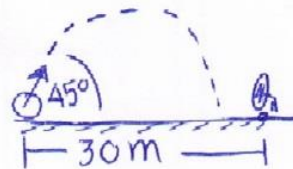
$$t = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 8}}{2(1)}$$

$$t = \sqrt{3} \pm 1$$

$$x = u_x t = 10(\sqrt{3} \pm 1) \text{ m}$$

Ex 19 นักยิงธนูอยู่ห่างจากเป้าที่วางบนพื้น 30 เมตร แล้วยิงลูกธนูทำมุม 45° องศากับแนวราบไปยังเป้า ปรากฏว่าลูกธนูตกถึงก่อนเป้า หากต้องการยิงลูกธนูลูกเดิมให้เข้าเป้าควรทำอย่างไร (PSU)

1. เพิ่มความเร็วต้น
2. ลดความเร็วต้น
3. เพิ่มมุมยิง
4. ลดมุมยิง



Ex 20 ถ้ายิงปืนใหญ่ 2 กระบอกพร้อมๆกัน ณ ตำแหน่งเดียวกัน ไปยังเป้าหมายที่อยู่บนพื้นระดับเดียวกัน ปืนทั้งสองด้วยความเร็วต้นเท่ากัน ตามข้อมูลดังตาราง

	ปืนกระบอกที่ หนึ่ง	ปืนกระบอกที่ สอง
มุมเงยของปากกระบอกปืน	60 องศา	30 องศา
ระยะที่กระสุนตกในแนวราบ	X_1	X_2
เวลาที่กระสุนเคลื่อนที่ในอากาศ	t_1	t_2

ข้อใดสรุปได้ถูกต้อง (PSU)

1. $X_1 = X_2$
2. $X_1 < X_2$
3. $t_1 = t_2$
4. $t_1 < t_2$