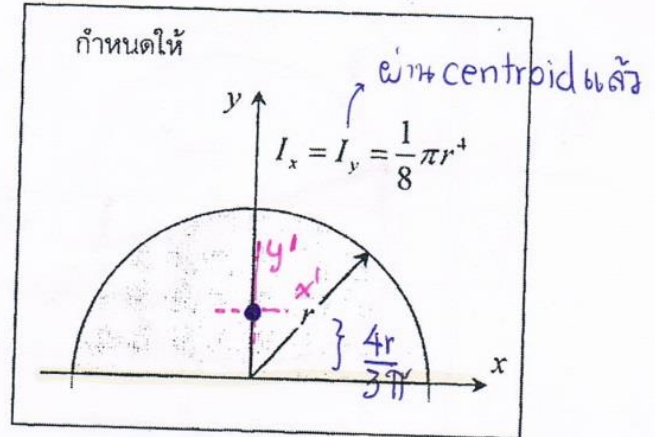
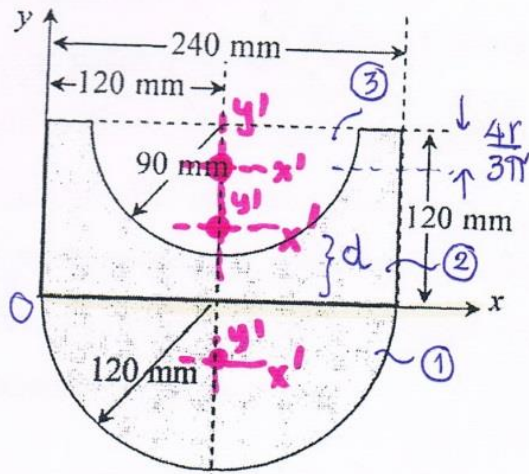


special

ข้อที่ 1 (20 คะแนน)

จงหาเฉพาะโมเมนต์ความเฉื่อยเทียบกับแกน x (I_x) และผลคูณความเฉื่อย (I_{xy}) ของรูปประกอบด้านล่าง



$$(1) \quad I_x = I_{x_1} + I_{x_2} - I_{x_3}$$

$$= \left[\frac{\pi r^4}{8} \right]_1 + \left[\bar{I}_{x'_1} + Ad^2 \right]_2 - \left[\bar{I}_{x'_1} + Ad^2 \right]_3$$

หา $\bar{I}_{x'}$ ก่อนจากรูปที่กำหนดให้

(S1) ตั้งแกน $x'-y'$

$$(S2) \quad I_x = \bar{I}_{x'} + Ad^2$$

$$(S3) \quad \frac{\pi r^4}{8} = \bar{I}_{x'} + \left(\frac{\pi r^2}{2} \right) \left(\frac{4r}{3\pi} \right)^2$$

$$\bar{I}_{x'} = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{8}{9} \frac{r^4}{\pi}$$

ค่า centroid ของ ครึ่งวงกลม

$$= \frac{\pi (120)^4}{8} + \left[\frac{240 (120)^3}{12} + 240 (120) 60^2 \right] - \left[\left(\frac{\pi 90^4}{8} - \frac{8}{9} \frac{(90)^4}{\pi} \right) + \frac{\pi (90)^2}{2} \left(120 - 4 \times \frac{90}{3\pi} \right)^2 \right]$$

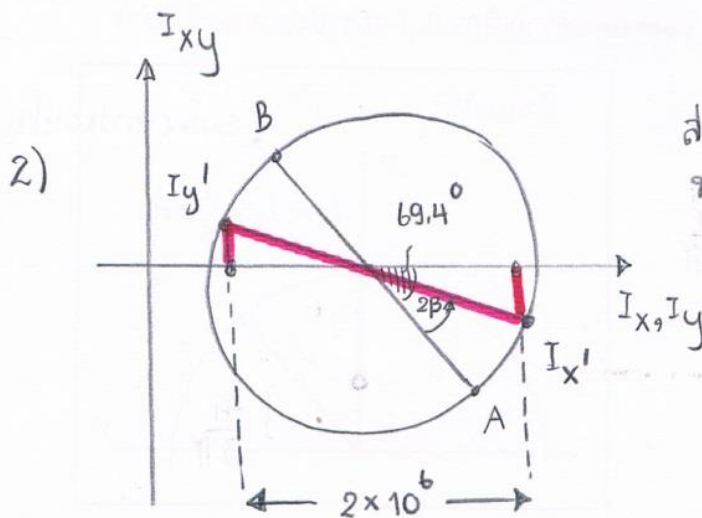
$$= 1.27 \times 10^8 \text{ mm}^4 \quad \#$$

$$(2) \quad I_{xy} = I_{xy_1} + I_{xy_2} - I_{xy_3} = \left[\bar{I}_{x'_1 y'_1} + \bar{x} \bar{y} A \right]_1 + \left[\bar{I}_{x'_1 y'_1} + \bar{x} \bar{y} A \right]_2 - \left[\bar{I}_{x'_1 y'_1} + \bar{x} \bar{y} A \right]_3$$

x, y สัมพัทธ์กับรูปรวม?

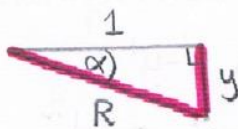
$$= \left[120 \left(-4 \times \frac{120}{3\pi} \right) \frac{\pi (120)^2}{2} \right] + \left[120 (60) (240 \times 120) \right] - \left[120 \left(120 - 4 \times \frac{90}{3\pi} \right) \frac{\pi (90)^2}{2} \right]$$

$$= -5.57 \times 10^7 \text{ mm}^4 \quad \#$$



สมมติวงกลมโมร์

หมุน 2β ทำให้ $I_{x'} = I_{y'} + 2 \times 10^6$



$$\cos \alpha = \frac{1}{R} = \frac{1}{2.14}$$

$$\alpha = 62.14^\circ$$

จะได้ $2\beta = 69.4^\circ - \alpha = 7.26^\circ$

∴ $\boxed{\beta = 3.63^\circ}$ #

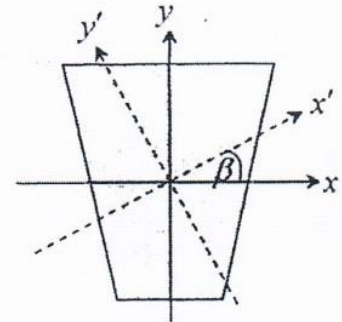
▶ $I_{x'y'} = -R \sin \alpha$
 $= -(2.14 \times 10^6) \sin 62.14^\circ$

$\boxed{I_{x'y'} = -1.892 \times 10^6 \text{ mm}^4}$ #

ข้อที่ 2 (20 คะแนน)

กำหนดให้โมเมนต์ความเฉื่อยและผลคูณความเฉื่อยเทียบกับแกน x และ y ของหน้าตัดใดๆ มีค่า $I_x = 300 \times 10^4 \text{ mm}^4$, $I_y = 150 \times 10^4 \text{ mm}^4$, และผลคูณของความเฉื่อย $I_{xy} = -200 \times 10^4 \text{ mm}^4$

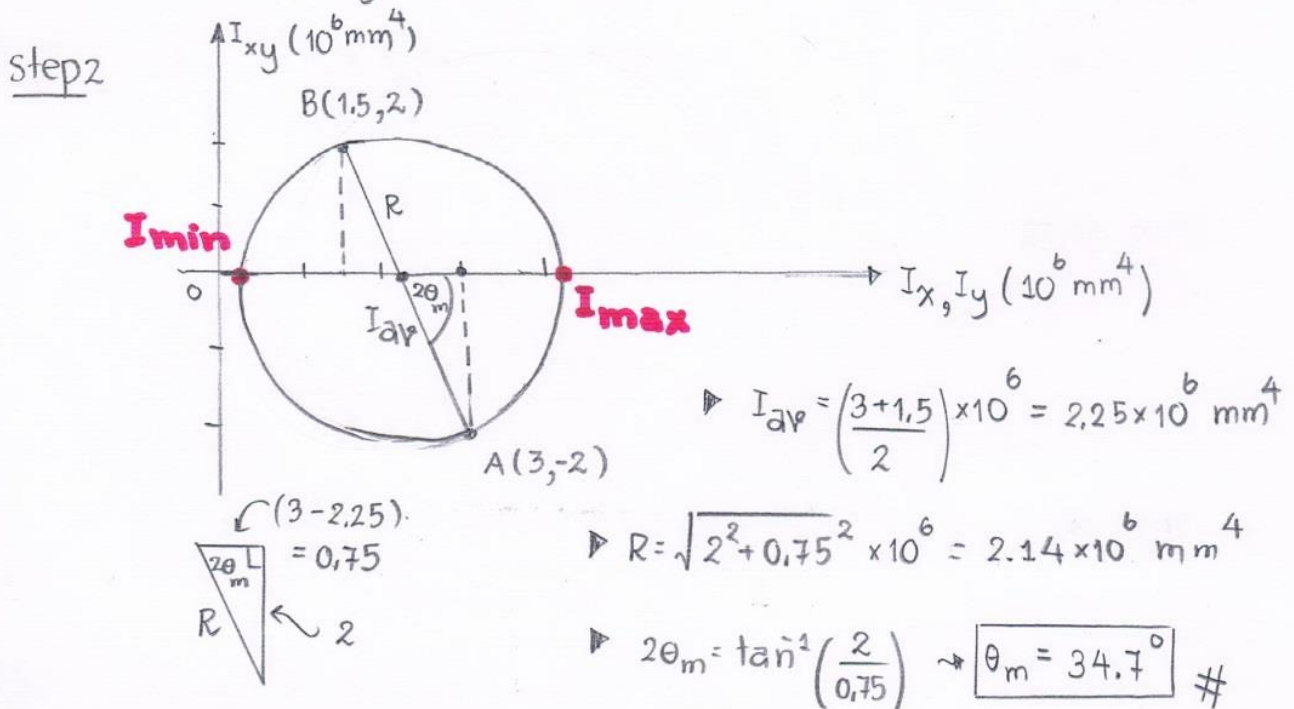
จงใช้วงกลมโมร์หาค่าดังต่อไปนี้ (ห้ามใช้สูตร)



1) แกนหลัก (θ_m) และโมเมนต์ความเฉื่อยหลัก (I_{max} และ I_{min})

2) จงหาขนาดของมุม β ในทิศทวนเข็มนาฬิกาแสดงในรูปโดยเป็นตำแหน่งที่ I_x มากกว่า I_y เท่ากับ $200 \times 10^4 \text{ mm}^4$ พร้อมทั้งระบุผลคูณของความเฉื่อย ณ ตำแหน่งดังกล่าว

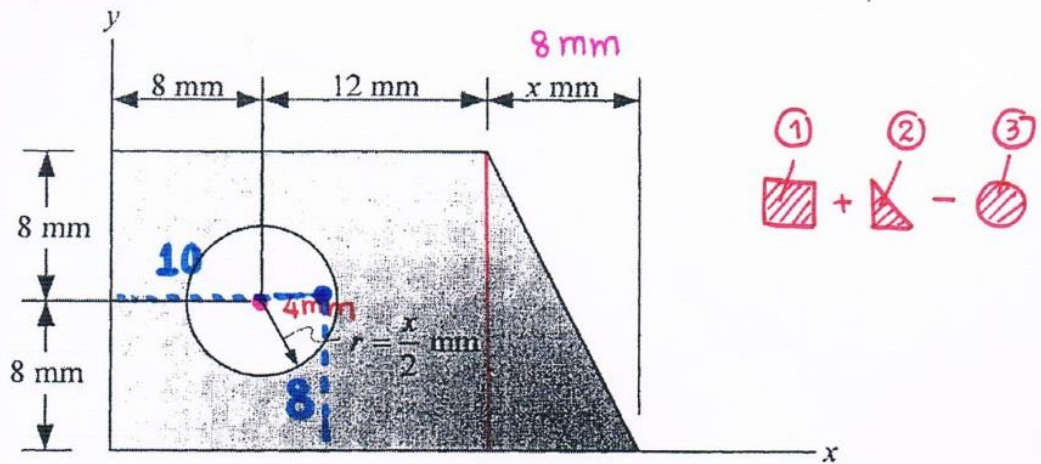
1) step1 $A(I_x, I_{xy}) = A(3, -2) \times 10^6 \text{ mm}^4$
 $B(I_y, -I_{xy}) = B(1.5, 2) \times 10^6 \text{ mm}^4$



step3 $I_{max} = I_{av} + R = 4.39 \times 10^6 = 439 \times 10^4 \text{ mm}^4 \#$
 $I_{min} = I_{av} - R = 0.11 \times 10^6 = 110 \times 10^4 \text{ mm}^4 \#$

ข้อที่ 3 (20 คะแนน) $(\bar{x}, \bar{y})$

จงหาพิกัดจุดเซนตทรอยด์ ของพื้นที่ประกอบตามรูป เมื่อระยะ $x = 8 \text{ mm}$



step1

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}A}{\sum A}, \quad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}A}{\sum A}$$

step2

$$\bar{x} = \frac{\tilde{x}_1 A_1 + \tilde{x}_2 A_2 - \tilde{x}_3 A_3}{A_1 + A_2 - A_3}$$

$$= \frac{10(16 \times 20) + \left[20 + \frac{8}{3}\right] \frac{8 \times 16}{2} - 8\pi(4)^2}{320 + 64 - 16\pi} = 12.73 \text{ mm}$$



$$\bar{y} = \frac{\tilde{y}_1 A_1 + \tilde{y}_2 A_2 - \tilde{y}_3 A_3}{A_1 + A_2 - A_3}$$

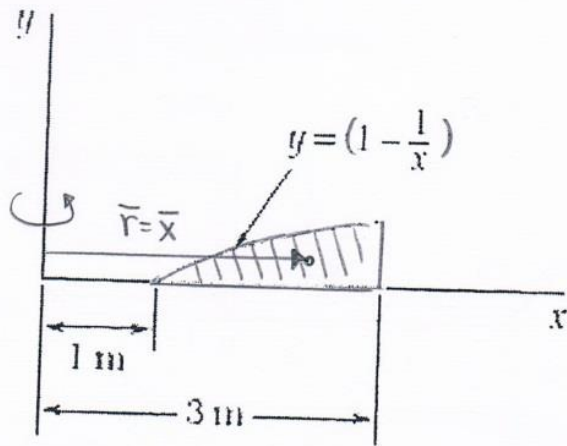
$$= \frac{8(320) + \frac{16}{3}(64) - 8(16\pi)}{320 + 64 - 16\pi} = 7.49 \text{ mm}$$

step3

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (12.73, 7.49) \text{ mm}$$

ข้อที่ 4 (20 คะแนน)

จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุน พื้นที่แรเงาดังรูปรอบแกน y



Step 1 $V = \theta \bar{r} A$

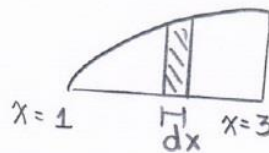
step 2 $\theta = 2\pi \text{ rad}$

$\bar{r} = \bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA}$

หา $\int \tilde{x} dA = \int x (y_u - y_l) dx$

$= \int_1^3 x \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^3 (x-1) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \Big|_1^3$

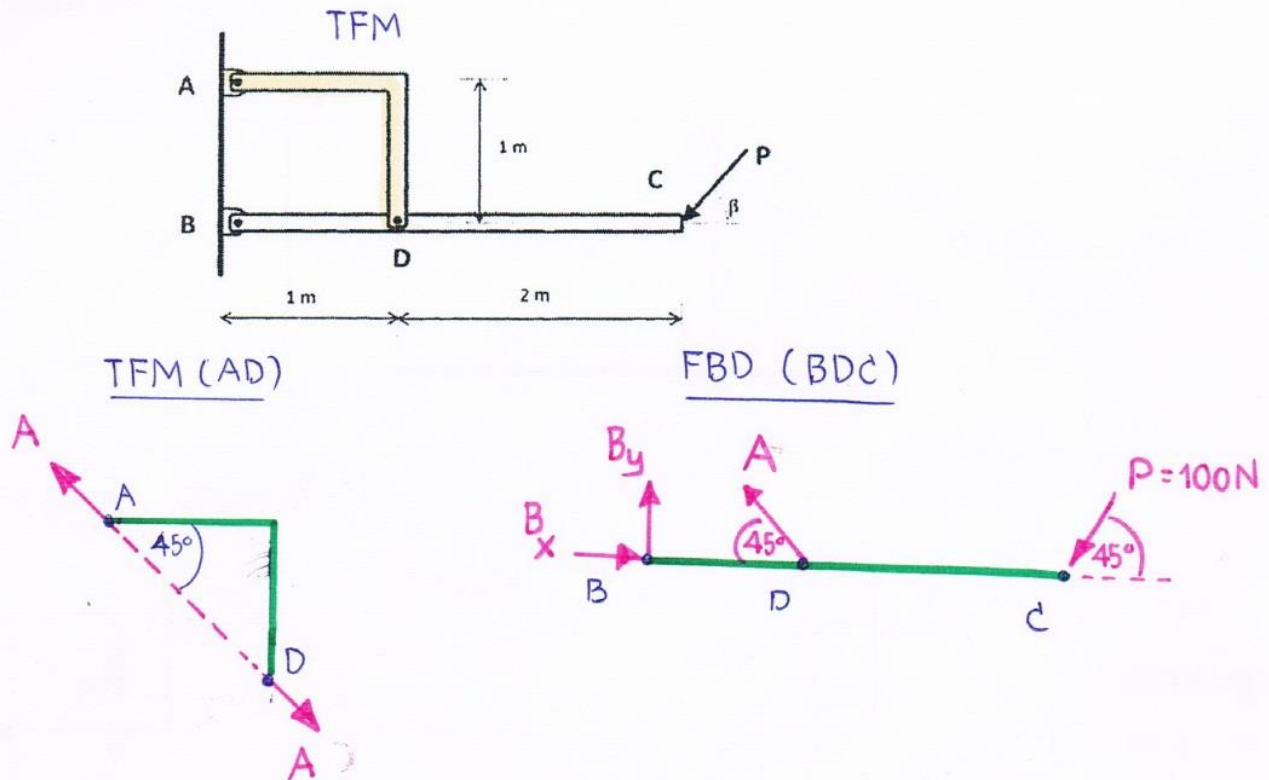
$= \left(\frac{3^2}{2} - 3\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right) = 2 \text{ m}^3$



step 3 $V = 2\pi \left(\frac{2}{\int dA}\right) A = 4\pi = 12.57 \text{ m}^3 \quad \#$

ข้อที่ 5 (20 คะแนน)

ชิ้นส่วน AD และ BDC ของเฟรมที่แสดงในรูป มีแรงภายนอก P ขนาด 100 N ทำมุม $\beta = 45^\circ$ กับแนวราบ จงหาแรงที่กระทำต่อชิ้นส่วน AD และแรงปฏิกิริยาของที่รองรับ A และ B

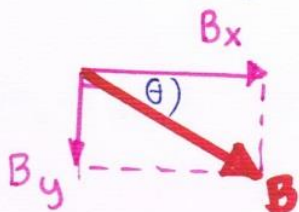


$$\sum M_B = 0 : A \sin 45^\circ (1) - 100 \sin 45^\circ (3) = 0$$

$$A = 300 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 : B_x - A \cos 45^\circ - 100 \cos 45^\circ = 0 \rightarrow B_x = 282.8 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 : B_y + A \sin 45^\circ - 100 \sin 45^\circ = 0 \rightarrow B_y = -141.4 \text{ N}$$



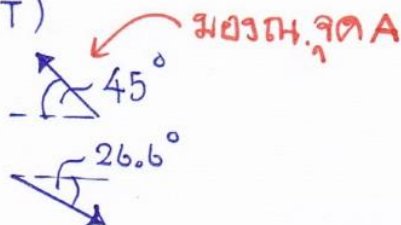
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 316 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{141.4}{282.8} \right) = 26.6^\circ$$

$$F_{AD} = 300 \text{ N (T)}$$

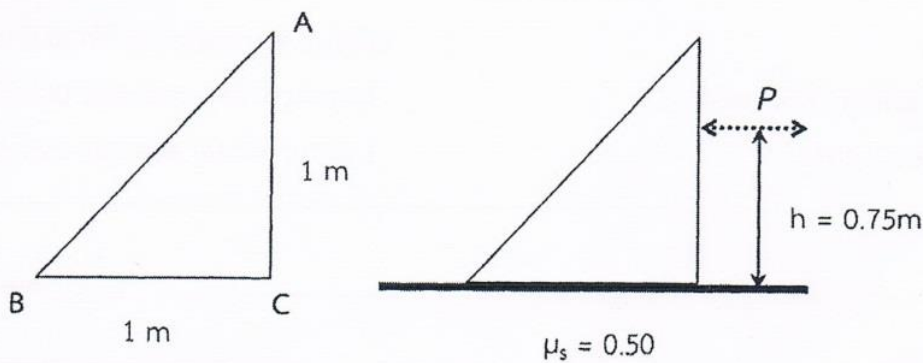
$$A = 300 \text{ N}$$

$$B = 316 \text{ N}$$

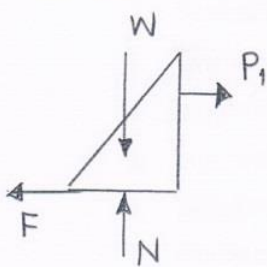


ข้อที่ 6 (20 คะแนน)

กล่องสามเหลี่ยม ABC มีมวล 100 kg วางอยู่บนพื้นราบและมีแรงตามแนวระดับ P (ไม่ทราบขนาดและทิศทาง) มากระทำที่ระยะเหนือพื้น h ดังแสดงในรูป กำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างกล่องสามเหลี่ยมกับพื้น $\mu_s = 0.50$ จงหา P ที่น้อยที่สุดที่ทำให้กล่องสามเหลี่ยมเริ่มจะไม่สมดุล (อาจเกิดการเลื่อนหรือพลิกล้ม tipping over)



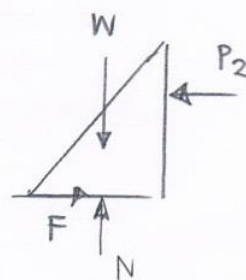
Case 1 เลื่อนพอดี



$$P_1 = F = \mu_s N$$

$$= 0.5 (100g)$$

$$P_1 = 50g \text{ N}$$

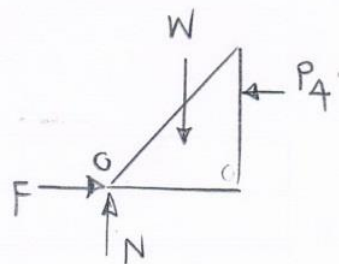
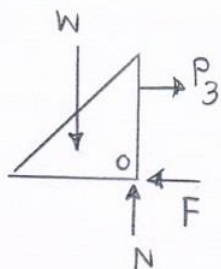


$$P_2 = F = \mu_s N$$

$$= 0.5 (100g)$$

$$P_2 = 50g \text{ N}$$

Case 2 ล้มพอดี (N ย้ายไปที่มุมล้ม)



$$\sum M_o = 0 : P_3 (0.75) = mg (0.5)$$

$$P_3 = 66.7g \text{ N}$$

$$\sum M_o = 0 : P_4 (0.75) = mg (0.5)$$

$$P_4 = 66.7g \text{ N}$$

$$\therefore P_{\min} = 50(9.81) = 491 \text{ N} \#$$