

ชื่อ-สกุล _____ รหัสนักศึกษา _____ อาจารย์ผู้สอน _____

มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

เกณฑ์ใหม่ในวิธีสอบ



คณะวิศวกรรมศาสตร์

การสอบปลายภาค ประจำปีการศึกษาที่ 2

ปีการศึกษา 2558

วันเสาร์ที่ 7 พฤษภาคม 2559

เวลา 9.00-12.00 น.

วิชา 215-221 Engineering Mechanics II

ห้อง หัวหูน (01, 02) R201(03) S102 (216-221)

คำสั่ง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 3 ตอน ให้ทำทุกตอน คะแนนรวม 180 คิดส่วนเพียง 150 โดย 30 ถือเป็นโบนัส
2. ไม่อนุญาตให้นำ เครื่องคิดเลข และ เอกสารใดๆ เข้าห้องสอบ
3. ห้ามยืมอุปกรณ์ใดๆ ในห้องสอบ
4. จงเขียนเลขที่นั่งสอบในกล่องสี่เหลี่ยมด้านบน ↗
5. ให้เขียนชื่อ-สกุล รหัสนักศึกษา และ ชื่ออาจารย์ผู้สอน ลงในข้อสอบทุกหน้า
6. ใช้ตารางหา $\lg$ ในหน้าสุดท้าย และ ขอให้ทุกคนทำข้อสอบให้ดีที่สุดค่ะ ^.^

ทุจริตในการสอบ โทษขั้นต่ำคือปรับตกในรายวิชาที่ทุจริตและพักการเรียน 1 ภาคการศึกษา

Topics	ตอนที่	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้
Kinematics of a Rigid Body	1	60	
Kinetics of a Rigid Body	2	60	
	3	60	
รวม		150 (50%)	

อ. สมชาย แซ่ฮ้อ (01 : 2MaE, 2MnE, 216-221 ตกค้าง)

อ. จีระภา สุขแก้ว (02 : ตกค้าง)

อ. ชลิตา หิรัญสุข (03 : MtE)

(ผู้ออกข้อสอบ)

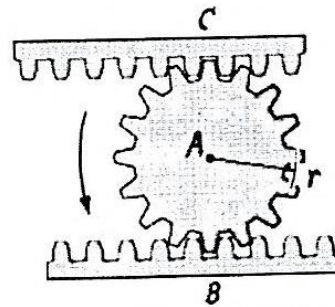
45

ตอนที่ 1 Kinematics of a Rigid Body ~~2~~ ออกและตรวจโดย อาจารย์ ชลิตา หิรัณสุข

ข้อ 1-1 [10 คะแนน] IC : ระบบซึ่งประกอบด้วยเกียร์ทั้งสามตัว A, B, และ C โดยเกียร์ A หมุนทวนเข็มนาฬิกา ดังรูป

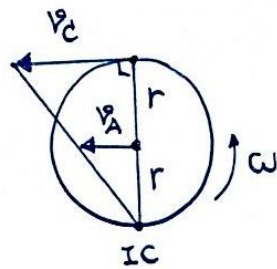
คำตอบ อยู่ในรูปของกลุ่มตัวแปรที่กำหนดให้เท่านั้น

เฟือง A รัศมี r เมตร
อัตราเร็วเชิงมุม = ω



→ พิจารณา

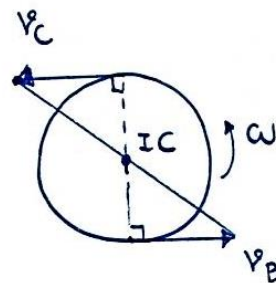
[5 คะแนน] ถ้าเกียร์ B ถูกยึดให้อยู่กับที่ จงขนาดความเร็วของเกียร์ C พร้อมแสดงทิศทาง



$$v_C = \omega(2r)$$

$$= 2\omega r \quad \#$$

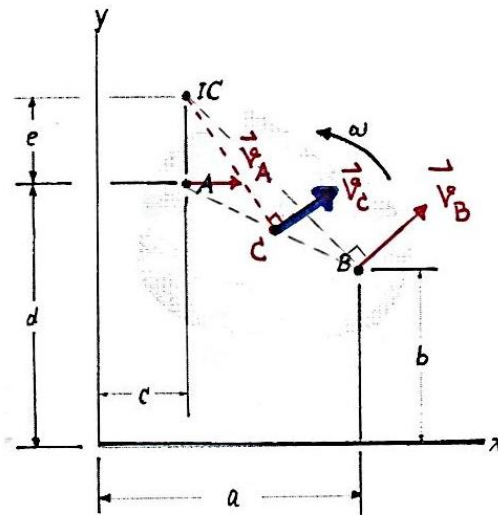
[5 คะแนน] ถ้าเกียร์ B เคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็ว v_B หา ความเร็วของเกียร์ C



$$v_C = v_B = \omega r \quad \#$$

ข้อ 1-2 [15 คะแนน] IC : Rigid Body ประกอบด้วยจุด A และ B ดังรูป ณ ขณะนี้มีจุด IC ดังแสดงในรูป

[5 คะแนน] ถ้าตำแหน่ง C อยู่ตรงกลางระหว่าง A กับ B จงแสดงทิศทางของ $\vec{v}_C$ ลงบนรูปให้ถูกต้อง

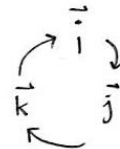
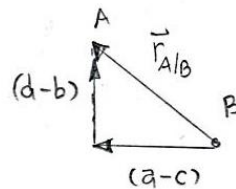


[10 คะแนน] จงแสดงการหาขนาดและทิศทางของ $\vec{v}_{A/B}$ => คำตอบอยู่ในรูปของตัวแปรที่ให้เท่านั้น

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A + (-\vec{v}_B)$$

จาก $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{A/B}$

$$\begin{aligned} \vec{v}_A - \vec{v}_B &= \vec{v}_{A/B} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{A/B} \\ &= (\omega \vec{k}) \times [-(a-c)\vec{i} + (d-b)\vec{j}] \\ &= -\omega(a-c)\vec{j} - \omega(d-b)\vec{i} \end{aligned}$$



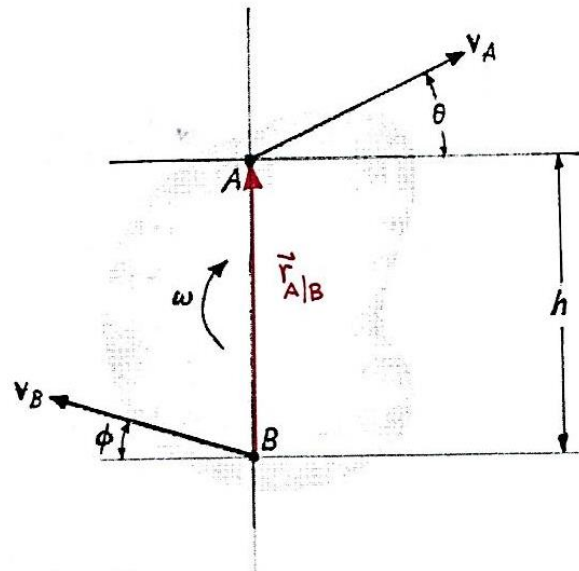
ขนาด : $v_{A/B} = \omega \sqrt{(a-c)^2 + (d-b)^2}$ #

ทิศ : $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-\omega(d-b)}{-\omega(a-c)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{d-b}{a-c}\right)$ #

ข้อ 1-3 [10 คะแนน] Relative Motion Analysis => Velocity

Rigid Body ประกอบด้วยจุด A และ B ซึ่งมีขนาดและทิศทางของความเร็วแสดงดังรูป

[10 คะแนน] จงหา ω ในรูปของกลุ่มตัวแปรอื่นๆ ที่ให้มา



$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

$$(v_A \cos \theta) \vec{i} + (v_A \sin \theta) \vec{j} = -(v_B \cos \phi) \vec{i} + (v_B \sin \phi) \vec{j} + (-\omega \vec{k}) \times h \vec{j}$$

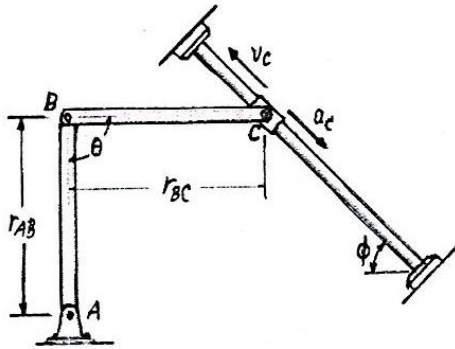
$$(v_A \cos \theta + v_B \cos \phi) \vec{i} + (v_A \sin \theta - v_B \sin \phi) \vec{j} = \omega h \vec{i}$$

$$\vec{i} : \quad \omega = \frac{v_A \cos \theta + v_B \cos \phi}{h} \quad \#$$

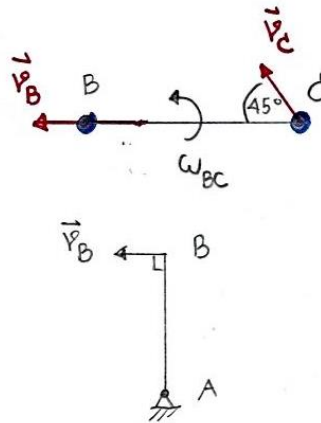
ข้อ 1-4 [25 คะแนน] Relative Motion Analysis => Velocity & Acceleration

กำหนดให้ $\theta = 90^\circ$ และ $\phi = 45^\circ$ หา $\vec{v}_B$, ω_{BC} , ω_{AB} , และ α_{AB}

คำตอบอยู่ในรูปของกลุ่มตัวแปรที่กำหนดให้ในรูป



ชี้หา BC



$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= \vec{v}_C + \omega_{BC} \times \vec{r}_{B/C} \\ -v_B \vec{i} &= -v_C \cos 45^\circ \vec{i} + v_C \sin 45^\circ \vec{j} + (\omega_{BC} \vec{k}) \times (-r_{BC} \vec{i}) \\ -v_B \vec{i} &= -\frac{v_C}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{v_C}{\sqrt{2}} \vec{j} - \omega_{BC} r_{BC} \vec{j} \\ \vec{j} : 0 &= \frac{v_C}{\sqrt{2}} - \omega_{BC} r_{BC} \rightarrow \omega_{BC} = \frac{v_C}{\sqrt{2} r_{BC}} \quad \# \\ \vec{i} : -v_B &= -\frac{v_C}{\sqrt{2}} \rightarrow v_B = \frac{v_C}{\sqrt{2}} \quad \# \end{aligned}$$

ชี้หา AB

$$v_B = \omega_{AB} r_{AB}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_C}{\sqrt{2} r_{AB}} \quad \#$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_B &= \vec{a}_C + \alpha_{BC} \times \vec{r}_{B/C} - \omega_{BC}^2 \vec{r}_{B/C} \\ &= (a_C \cos 45^\circ) \vec{i} - a_C \sin 45^\circ \vec{j} - (\alpha_{BC} \vec{k}) \times (-r_{BC} \vec{i}) \\ &\quad - \omega_{BC}^2 (-r_{BC} \vec{i}) \end{aligned}$$

$$a_B \vec{i} - a_{Bn} \vec{j} = \frac{a_C}{\sqrt{2}} \vec{i} - \frac{a_C}{\sqrt{2}} \vec{j} + \alpha_{BC} r_{BC} \vec{j} + \omega_{BC}^2 \vec{i}$$

$$\begin{aligned}\vec{i} : \alpha_{AB} r_{AB} &= \frac{a_C}{\sqrt{2}} + \left(\frac{v_C}{\sqrt{2} r_{AB}} \right)^2 \\ \alpha_{AB} &= \frac{a_C}{\sqrt{2} r_{AB}} + \frac{v_C^2}{2 r_{AB}^3} \quad \# \end{aligned}$$

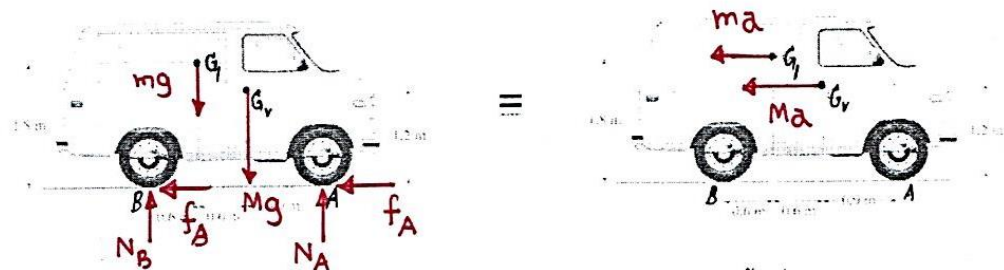
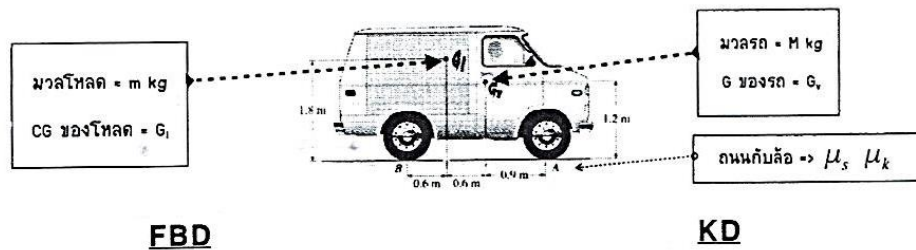
หาค่า

$$\begin{aligned}a_{Bt} &= \alpha_{AB} r_{AB} \\ a_{Bn} &= \omega_{AB}^2 r_{AB} \\ &= \frac{v_C^2}{2 r_{AB}} \end{aligned}$$

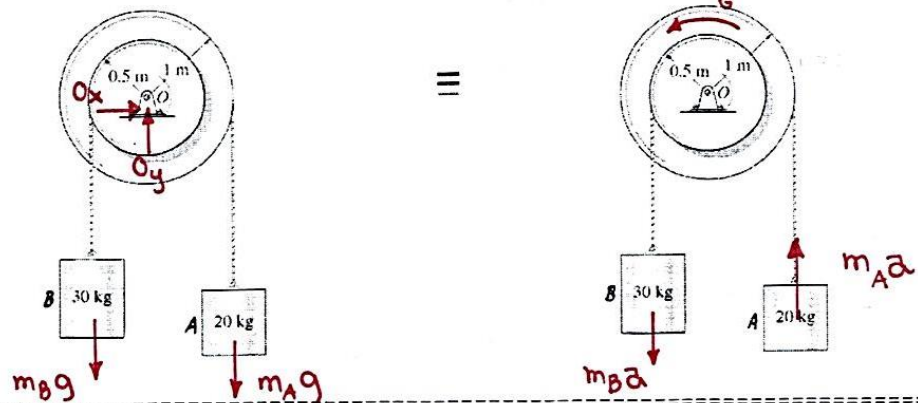
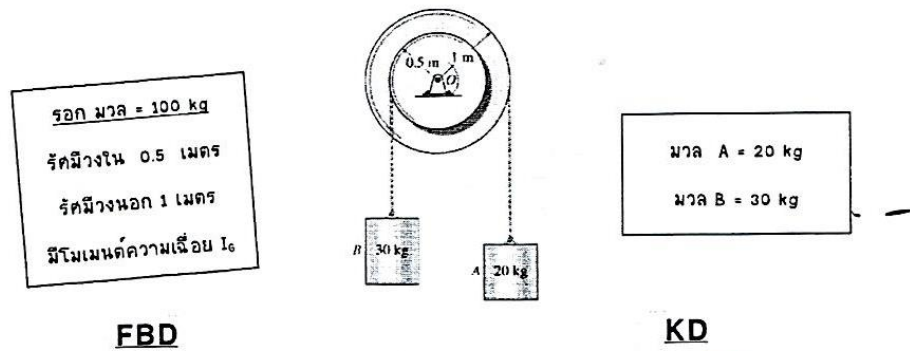
ตอนที่ 2 Kinetics of a Rigid Body Use Newton-Euler Equations ออกและตรวจโดย จีระภา สุขแก้ว

ข้อ 2-1 [10 คะแนน] Type 1 : Translation จงแสดง FBD & KD ของระบบ ลงบนรูป พยายามใช้ตัวแปรที่ให้

[5 คะแนน] รถบรรทุกมวล M บรรทุกโหลต m ถูกเบรคจนล้อทั้งสี่ล็อก และ ครูดไปกับผิวถนน



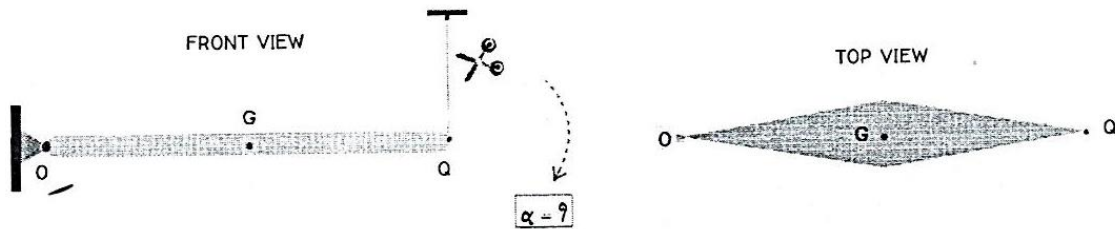
[5 คะแนน] ปลอยให้ระบบซึ่งประกอบด้วย มวล A มวล B และรอกสองชั้นซึ่งยึดติดหมุนไปด้วยกัน เคลื่อนที่ จากเดิมหยุดนิ่ง จงวิเคราะห์แสดงการเคลื่อนที่ที่ถูกต้องของทั้งระบบ



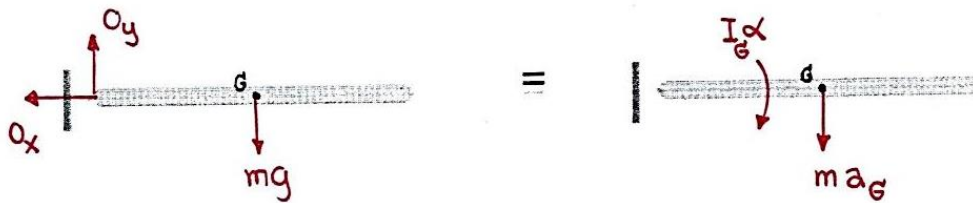
ชื่อ-สกุล _____ รหัสนักศึกษา _____ อาจารย์ผู้สอน _____

ข้อ 2-2 [25 คะแนน] Type 2 : Rotation about a fixed axis

แท่ง OQ ซึ่งมี มวล m กิโลกรัม ยาว L เมตร และ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล $G \Rightarrow I_G \text{ kg.m}^2$ โดยมีมุมองศาหน้า และ ด้านบน ดังรูป จงหา อัตราเร่งเชิงมุม ของแท่งนี้หลังเชือกที่ผูกติดกับปลาย Q ถูกตัดปล่อยให้หมุนได้อิสระรอบ จุด O



[5 คะแนน] จงเขียน FBD & KD ของแท่ง OQ ลงบนรูปที่กำหนดให้



[5 คะแนน] สมการการเคลื่อนที่เพื่อหาค่า อัตราเร่งเชิงมุม

$$\begin{aligned}
 (+) \quad (\sum M_O)_{FBD} &= (\sum M_O)_{KD} \\
 mg \frac{L}{2} &= I_G \alpha + m a_G \frac{L}{2} \\
 2 \times ; \quad mgL &= 2 I_G \alpha + m \left(\alpha \frac{L}{2} \right) L \\
 2 \times ; \quad 2mgL &= (4 I_G + mL^2) \alpha
 \end{aligned}$$

คำตอบ อยู่ในรูปของตัวแปรที่กำหนด (m, L, I_G, g) $\Rightarrow$

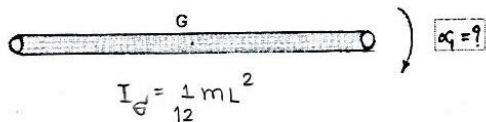
$$\alpha = \frac{2mgL}{(4I_G + mL^2)}$$

ชื่อ-สกุล _____ รหัสนักศึกษา _____ อาจารย์ผู้สอน _____

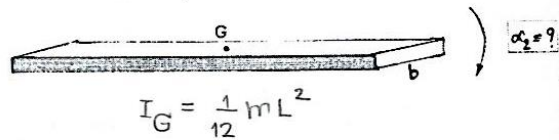
จากคำตอบที่ได้ จง วิเคราะห์ และ อธิบาย คำถามต่อไปนี้ โดยเลือกใช้ I_G จากตารางหน้าสุดท้าย

[5 คะแนน] จงเปรียบเทียบ ค่าอัตราเร่งเชิงมุม เมื่อกำหนดให้ แท่ง OQ เป็น slender rod และ thin plate

case 1) slender rod มวล m ยาว L



case 2) thin plate มวล m ยาว L กว้าง b



ค่า I_G เท่ากัน , m , L เท่ากัน

$$\alpha = \frac{2mgL}{4\left(\frac{1}{12}mL^2\right) + mL^2} = \frac{3mgL}{2mL^2} = \frac{3g}{2L}$$

คำตอบ

$\Rightarrow$

$$\alpha_1 = \frac{3g}{2L}$$

$< = >$

$$\alpha_2 = \frac{3g}{2L}$$

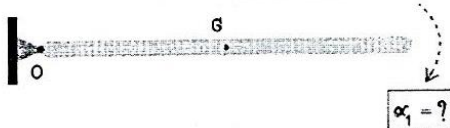
$\Leftarrow$

สรุป ความรู้ที่ได้

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

[5 คะแนน] เมื่อกำหนดให้ แท่ง OQ เป็น slender rod ทั้งสองแท่ง ดังรูป จงเปรียบเทียบ อัตราเร่งเชิงมุมทั้งสอง

case 1) rod ผอม มวล m ยาว L



$$\alpha_1 = \frac{3g}{2L}$$

case 2) rod อ้วน มวล m ยาว $L/2$



$$\alpha_2 = \frac{2mg\left(\frac{L}{2}\right)}{4\left[\frac{1}{12}m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] + m\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{3mgL/mL^2}{1} = \frac{3g}{L}$$

คำตอบ

$\Rightarrow$

$$\alpha_1 = \frac{3g}{2L}$$

$< = >$

$$\alpha_2 = \frac{3g}{L}$$

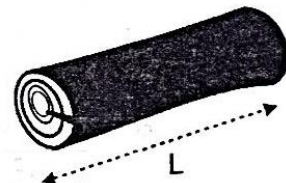
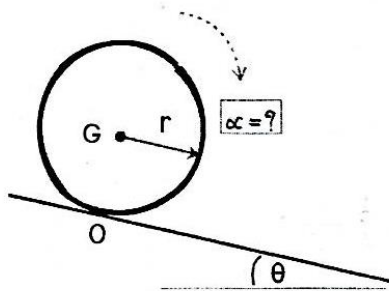
$\Leftarrow$

สรุป ความรู้ที่ได้

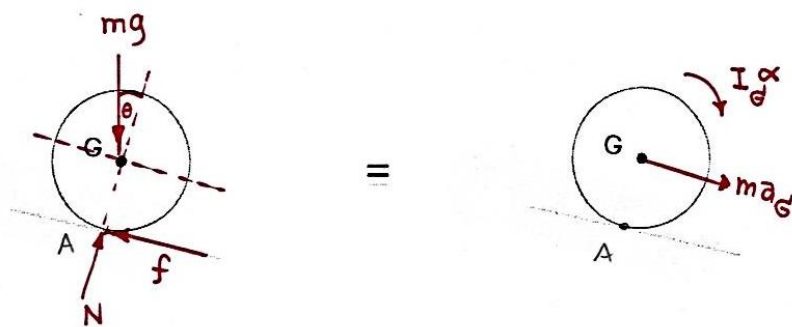
$$\alpha_1 < \alpha_2$$

ข้อ 2-3 [25 คะแนน] Type 3 : General Plane Motion

ปล่อยขออนไม้ มวล m กิโลกรัม รัศมี r เมตร ยาว L เมตร จากเดิมหยุดนิ่ง ให้กลิ้งลงโดยไม่มีการลื่นไถล ตามพื้นเอียงทำมุม θ ดังรูป กำหนดให้การกระจายตัวของเนื้อไม้มีความสม่ำเสมอ และมีจุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่ จุด G จงหาค่า อัตราเร่งเชิงมุม ของขออนไม้ คำตอบอยู่ในรูปของตัวแปรที่กำหนดเท่านั้น (m, r, L, g, θ)



[5 คะแนน] จงเขียน FBD & KD ลงบนรูปที่กำหนดให้



[5 คะแนน] สมการการเคลื่อนที่เพื่อหาค่า อัตราเร่งเชิงมุม

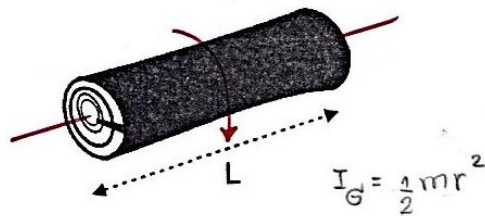
$$\begin{aligned}
 (+) \quad (\Sigma M_A)_{FBD} &= (\Sigma M_A)_{KD} \\
 (mgs \sin \theta) r &= I_G \alpha + m a_G r \\
 mgr \sin \theta &= I_G \alpha + m(\alpha r) r \\
 mgr \sin \theta &= (I_G + mr^2) \alpha
 \end{aligned}$$

คำตอบ อยู่ในรูปของตัวแปรที่กำหนดและอยู่ในรูปอย่างง่ายที่สุด =>

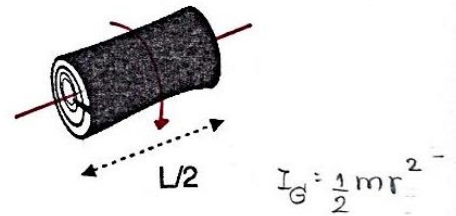
$$\alpha = \frac{mgr \sin \theta}{I_G + mr^2}$$

จากคำตอบที่ได้ จงใช้เพื่อ วิเคราะห์ และ อธิบาย คำถามต่อไปนี้

[Bonus 5 คะแนน] จงเปรียบเทียบ ค่าอัตราเร่งเชิงมุม ระหว่าง ขอนไม้ที่ สั้นยาวต่างกัน แต่มีหน้าตัดเดียวกัน



case 1) ยาว L รัศมี r มวล m



case 2) ยาว L/2 รัศมี r มวล m

$$\alpha = \frac{mgr \sin \theta}{\frac{1}{2}mr^2 + mr^2} = \frac{mgr \sin \theta}{\frac{3}{2}mr^2} = \frac{2}{3} \frac{g \sin \theta}{r}$$

คำตอบ ==>

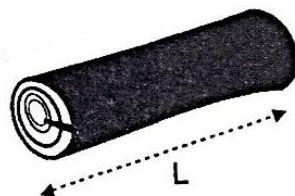
$$\alpha_1 = \frac{2g \sin \theta}{3r}$$

< = >

$$\alpha_2 = \frac{2g \sin \theta}{3r}$$

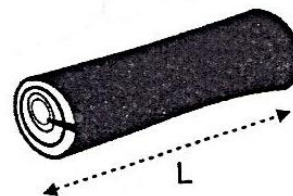
<==

[Bonus 5 คะแนน] จงเปรียบเทียบ อัตราเร่งเชิงมุม ระหว่าง ขอนไม้ที่แน่นต่างกัน แต่มีขนาดเดียวกัน



case 1) ยาว L รัศมี r มวล m

$$I_G = \frac{1}{2}mr^2$$



case 2) ยาว L รัศมี r มวล 2m

$$\alpha = \frac{2mgr \sin \theta}{mr^2 + (2m)r^2} = \frac{2mgr \sin \theta}{3mr^2} = \frac{2}{3} \frac{g \sin \theta}{r}$$

คำตอบ ==>

$$\alpha_1 = \frac{2g \sin \theta}{3r}$$

< = >

$$\alpha_2 = \frac{2g \sin \theta}{3r}$$

<==

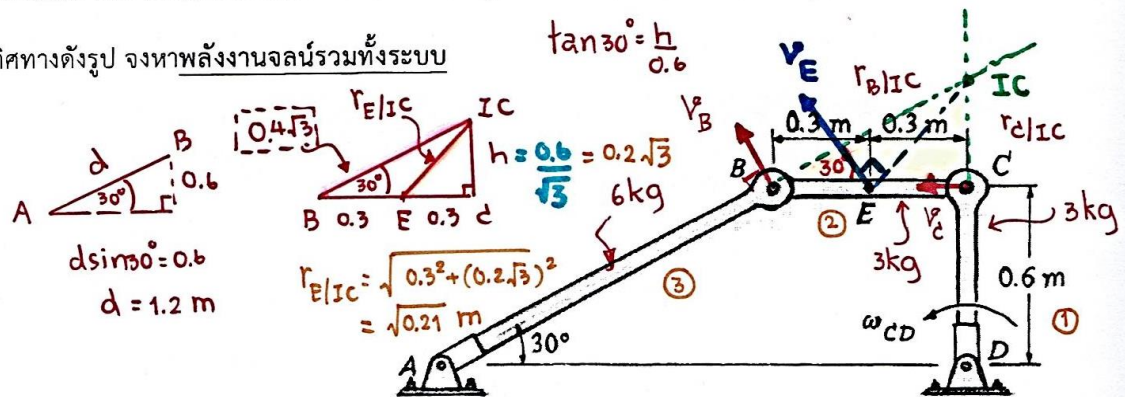
สรุป ความรู้ที่ได้

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

ข้อ 3-2 [30 คะแนน] ระบบดังรูป กำหนดให้แขนแต่ละอันทำจากวัสดุเดียวกันโดยมีมวลกระจายอย่าง

สม่ำเสมอ และมีมวลต่อความยาวคงที่เท่ากับ 5 kg/m ถ้าแขน CD มีอัตราเร็วเชิงมุม $\omega_{CD} = 10 \text{ rad/s}$

ทิศทางดังรูป จงหาพลังงานจลน์รวมทั้งระบบ



$$T_{\text{total}} = T_1 + T_2 + T_3$$

$$= \frac{1}{2} I_D \omega_{CD}^2 + \left[\frac{1}{2} m v_E^2 + \frac{1}{2} I_E \omega_{BC}^2 \right] + \frac{1}{2} I_A \omega_{AB}^2 \quad \text{--- (1)}$$

$\frac{1}{3} mL^2$ $\frac{1}{12} mL^2$ $\frac{1}{3} mL^2$

จาก $\omega_{BC} = \frac{v_C}{r_{C/IC}} = \frac{v_B}{r_{B/IC}} = \frac{v_E}{r_{E/IC}}$

$$\therefore \omega_{BC} = \frac{10(0.6)}{0.2\sqrt{3}} = \frac{v_E}{\sqrt{0.21}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{BC} = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \text{ rad/s} \\ v_E = 10\sqrt{3} \times \sqrt{0.21} \\ = 10\sqrt{0.62} \text{ m/s} \end{array} \right. \quad \text{--- (2)}$$

$$10\sqrt{3} = \frac{\omega_{AB}(1.2)}{0.4\sqrt{3}} \rightarrow \omega_{AB} = 10 \text{ rad/s}$$

$$\therefore T_{\text{total}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} (3) 0.6^2 \times 10^2 \right] + \left[\frac{1}{2} (3) (10\sqrt{0.62})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} \times 3 \times 0.6^2 \right) (10\sqrt{3})^2 \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \times 1.2^2 \right) 10^2$$

$$T_{\text{total}} = \quad \quad \quad J_{\#}$$