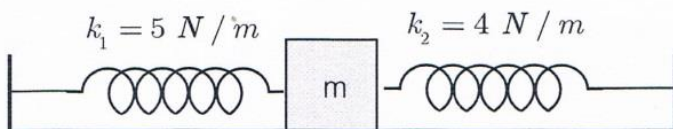


CLEAR ZONE

1. มวล 0.25 kg ที่ยึดกับสปริง 2 ตัวที่มีค่าคงตัวสปริงดังรูป แล้วปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่แบบ SHM บนพื้นเกลี้ยงในแนวราบ พบว่าที่เวลาต้น ($t = 0$ sec) มวลมี $x(0) = -5.0$ cm, $v(0) = +0.125$ m/s จงหา
- ก. ความถี่เชิงมุม คาบการเคลื่อนที่ แอมพลิจูด มุมเฟสเริ่มต้น และสมการการกระจัด
- ข. ความเร็วของวัตถุ และ แรงที่กระทำกับวัตถุ เมื่อวัตถุอยู่ที่ $x = 0.02$ m
- ค. ตำแหน่งที่วัตถุมีพลังงานจลน์เป็นครึ่งหนึ่งของพลังงานศักย์
- (10 คะแนน)



$$k_T = 5 + 4 = 9 \text{ N/m}$$

$$x = A \sin(\omega t + \phi_0) \rightarrow -0.05 = A \sin \phi_0 \quad \text{--- ①}$$

$$v = \omega A \cos(\omega t + \phi_0) \rightarrow 0.125 = \omega A \cos \phi_0 \quad \text{--- ②}$$

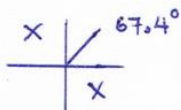
$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ก) } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9}{0.25}} = 6 \text{ rad/s} \quad \#$$

$$\text{I} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6} = 1.047 \text{ s} \quad \#$$

$$\text{I} \rightarrow \text{①/②} ; \frac{-0.05}{0.125} = \frac{A \sin \phi_0}{6 A \cos \phi_0}$$

$$\tan \phi_0 = -2.4$$



$$\phi_0 = 180^\circ - 67.4^\circ, 360^\circ - 67.4^\circ$$

$$= 112.6^\circ, 292.6^\circ$$

เงื่อนไขสมการ ①

$$\phi_0 = 292.6^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$= 5.107 \text{ rad}$$

$$\text{I} \rightarrow \text{จาก ①} ; -0.05 = A \sin 292.6^\circ$$

$$A = 0.0542 \text{ m} \quad \#$$

$$\text{I} \rightarrow \text{สมการ} \quad x = 0.0542 \sin(6t + 5.107) \text{ m} \quad \#$$

$$\text{ข) } \text{I} \rightarrow v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$= \pm 6 \sqrt{0.0542^2 - 0.02^2}$$

$$v = \pm 0.302 \text{ m/s} \quad \#$$

$$\text{I} \rightarrow F_s = kx = 9(0.02) = 0.18 \text{ N} \quad \#$$

$$\text{ค) } E_k = \frac{1}{2} E_{p_s}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (k x^2)$$

$$m[\omega^2(A^2 - x^2)] = \frac{1}{2} k x^2$$

$$0.25 (36) (0.0542^2 - x^2) = \frac{1}{2} (9) x^2$$

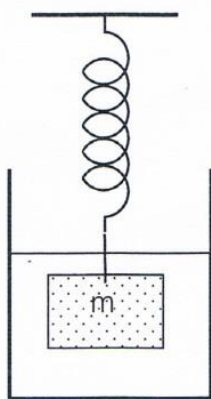
$$5.875 \times 10^{-3} - 2x^2 = x^2$$

$$x^2 = 1.9584 \times 10^{-3}$$

$$x = 0.0443 \text{ m} \quad \#$$

$$\rightarrow k = 2 \frac{\text{N}}{\text{cm}} = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

2. วัตถุมวล 1 kg ยึดติดกับสปริงที่มีค่าคงที่สปริง 2 N/cm นำไปออสซิลเลตในของเหลว โดยเกิดแรงต้านการเคลื่อนที่แปรผันโดยตรงกับอัตราเร็วของวัตถุ เมื่อเวลาผ่านไป 1.5 sec แอมพลิจูดของวัตถุเป็น 4.0 cm. ถ้าวัตถุออสซิลเลตด้วยความถี่เชิงมุมเท่ากับ 0.80 rad/s จงหา ค่าคงที่แดมป์ของการเคลื่อนที่ (b) แอมพลิจูดที่เวลาต้น (A_0) มุมเฟสเริ่มต้น (ϕ) การกระจัดของมวลที่เวลาใดๆ (10 คะแนน)



$$m = 1 \text{ kg}$$

$$A(1.5\text{s}) = 0.04 \text{ m}$$

$$\omega_d = 0.8 \text{ rad/s}$$

กำหนด

แอมพลิจูดที่เวลาใดๆ เป็น $A(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}$

ความถี่เชิงมุมของการแดมป์ เป็น $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

$$1) \quad \omega_d^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

$$\omega_d^2 = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

$$0.8^2 = \frac{200}{1} - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$b = 28.24 \text{ Ns/m} \quad \#$$

$$2) \quad A(1.5\text{s}) = A_0 e^{-(28.24/2)(1.5)}$$

$$0.04 = A_0 e^{-21.18}$$

$$A_0 = 6.32 \times 10^7 \text{ m} \quad \#$$

$$3) \quad x = A(t) \sin(\omega_d t + \phi)$$

$$t = 1.5\text{s} ; 0.04 = 0.04 \sin(0.8 \times 1.5 + \phi)$$

$$\sin(1.2 + \phi) = 1$$

$$1.2 + \phi = \pi/2 \rightarrow \phi = 0.3708 \text{ rad} \quad \#$$

$$4) \quad x = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\omega_d t + \phi)$$

$$x = 6.32 \times 10^7 e^{-14.12t} \sin(0.8t + 0.3708) \text{ m} \quad \#$$

3. จงหาการกระจัดรวมของสอง S.H.M พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงเส้นทางการเคลื่อนที่รวม เมื่อ

ก. S.H.M ทั้งสองมีสมการการกระจัดที่เวลาใด ๆ คือ $x_1 = 3 \sin(4t + \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2})$ และ $x_2 = 2 \sin(4t + \frac{\pi}{6} + \frac{3}{2})$

ข. S.H.M ทั้งสองมีสมการการกระจัดที่เวลาใด ๆ คือ $x = 3 \sin 4t$ และ $y = 4 \sin(4t - \frac{3\pi}{2})$

โดย x มีหน่วยเป็น cm. t มีหน่วยเป็น sec

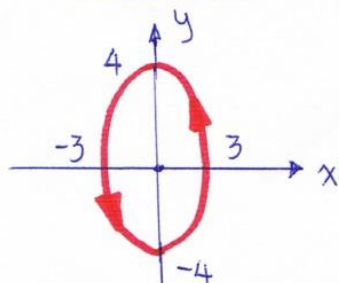
(ก) $x = 3 \sin 4t \rightarrow \frac{x}{3} = \sin 4t$ —①

$y = 4 \sin(4t - \frac{3\pi}{2})$
 $= 4 \sin(-\frac{3\pi}{2} + 4t)$

$= +4 \cos 4t \rightarrow \frac{y}{4} = \cos 4t$ —②

①² + ②²; $(\frac{x}{3})^2 + (\frac{y}{4})^2 = \sin^2 4t + \cos^2 4t$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$



$\frac{0.5471 \text{ rad}}{\pi} = \frac{\pi}{180^\circ} \rightarrow x = 31.35^\circ$

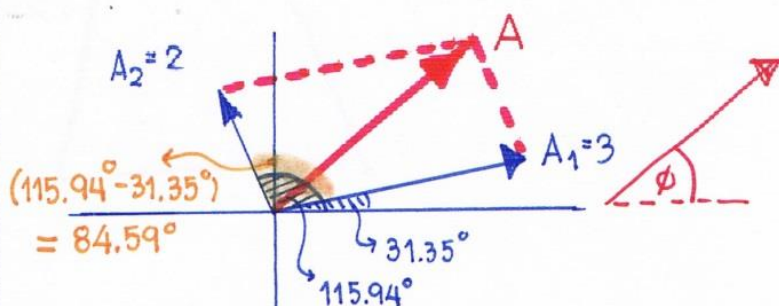
$\rightarrow x = 115.94^\circ$

$\delta = \frac{3\pi}{2}$

(10 คะแนน)

$\rightarrow 4 \text{ rad/sec}$

(ก) $x = x_1 + x_2 = A \sin(\omega t + \phi)$ —①



ท.1 A $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta$

$A^2 = 3^2 + 2^2 + 2(3)(2) \cos 84.59^\circ$

$A = 3.76 \text{ cm.}$

ท.2 ϕ

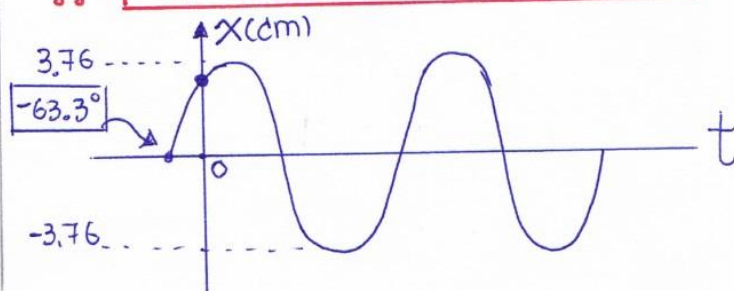
$t = 0 \text{ s} : x_1 + x_2 = A \sin(\omega t + \phi)$

$3 \sin 31.35^\circ + 2 \sin 115.94^\circ = 3.76 \sin \phi$

$\sin \phi = 0.8934$

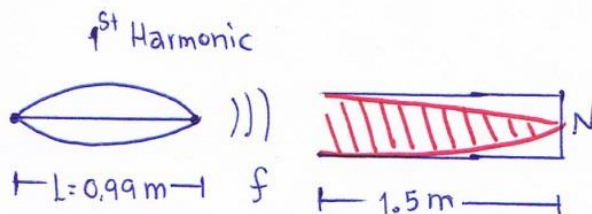
จากรูป $\phi < 90^\circ$
 $\phi = 63.3^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = 1.105 \text{ rad}$

$\therefore x = 3.76 \sin(4t + 1.105) \text{ cm}$



4. คลื่นในเส้นเชือกมีฟังก์ชันคลื่นเป็น $y = 1.5 \sin \pi \left(\frac{x}{16} - 40t \right)$ โดยที่ x, y มีหน่วยเป็น m และ t เป็นวินาที
จงหา แอมพลิจูด เลขคลื่น ความยาวคลื่น คาบ ความถี่ ทิศทางการเคลื่อนที่ อัตราเร็วของคลื่น อัตราเร็วและ
อัตราเร่งสูงสุดของอนุภาคในเส้นเชือก (10 คะแนน)

5. ท่อปลายปิดข้างหนึ่งยาว 1.5 m. ที่ปลายเปิดอยู่ใกล้เส้นเชือกปลายตรึงสองข้างยาว 0.99 m.มวล 16 g. ถ้าเกิดคลื่น
นิ่งฮาร์มอนิกที่ 1 ในเส้นเชือก ทำให้เกิดการสั่นพ้องกับอากาศในท่อ จงหา ความตึงของเชือก และความถี่ของคลื่น
นิ่งกำหนด ความเร็วของเสียงในอากาศ = 340 m/s (10 คะแนน)



อากาศ

$$S1 \quad \frac{\lambda}{4} = 1.5 \rightarrow \lambda = 6 \text{ m}$$

$$S2 \quad f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{6}$$

$$\therefore f_{\text{air}} = 56.67 \text{ Hz} \quad \#$$

เชือก

$$S1 \quad \frac{\lambda}{2} = 0.99 \rightarrow \lambda_{\text{string}} = 1.98 \text{ m}$$

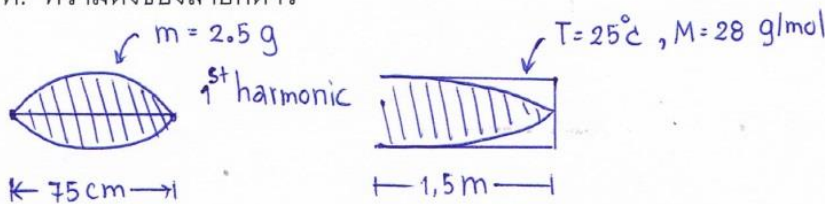
$$S2 \quad v = f\lambda$$

$$\sqrt{\frac{F}{\mu}} = 56.67 (1.98)$$

$$\therefore F = \frac{16 \times 10^{-3}}{0.99} \times (112.21)^2 \rightarrow F = 203.48 \text{ N} \quad \#$$

6. สายกีตาร์มวล 2.5 g ยาว 75 cm เกิดคลื่นนิ่งฮาร์โมนิกที่ 1 สั่นพ้องกับอากาศในท่อปลายปิดข้างหนึ่งซึ่งยาว 1.5 m ถ้าอุณหภูมิอากาศขณะนั้นเป็น 25°C มวลโมเลกุลเฉลี่ยของอากาศเป็น 28.0 และ $\gamma = 1.4$ จงหา
- ความยาวคลื่น อัตราเร็ว และความถี่ ของเสียงกีตาร์ ในอากาศ
 - ความยาวคลื่น อัตราเร็ว ของคลื่นในสายกีตาร์
 - ความตึงของสายกีตาร์

(10 คะแนน)



ก) ใน air

step 1 $\frac{\lambda}{4} = 1.5 \rightarrow \lambda_{\text{air}} = 6 \text{ m} \#$

step 2 $v = f\lambda$ โดย $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

$\therefore v = \sqrt{\frac{1.4(8.3145)(273+25)}{28 \times 10^{-3}}}$

$v_{\text{air}} = 351.97 \text{ m/s} \#$

จาก $v = f\lambda$

$351.97 = f(6)$

$f = 58.66 \text{ Hz} \#$

ข) ในสาย

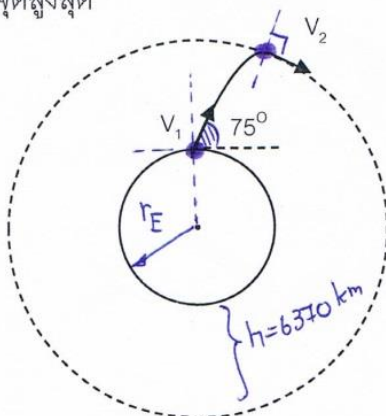
step 1 $\frac{\lambda}{2} = 0.75 \rightarrow \lambda_{\text{wire}} = 1.5 \text{ m} \#$

step 2 $v = f\lambda = 58.66(1.5) = 88 \text{ m/s} \#$

ค) $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \rightarrow m/L$
 $F = v^2 \mu = 88^2 \left(\frac{2.5 \times 10^{-3}}{0.75} \right)$
 $F = 25.81 \text{ N} \#$

7. ส่งจรวดขึ้นไปในทิศทำมุมกับผิวโลก 75° จุดสูงสุดอยู่เหนือผิวโลก 6,370 km จงหาอัตราเร็วของจรวดที่ผิวโลกและที่จุดสูงสุด

(10 คะแนน)



$r_{\text{orbit}} = r_E + h$

$= 6370 + 6370$

$= 12740 \text{ km}$

$L_1 = L_2$

$m v_1 r_1 \cos 75^\circ = m v_2 r_2$

$v_1 (r_E) \cos 75^\circ = v_2 (2r_E)$

$v_1 = 7.727 v_2 \quad \text{--- (1)}$

$E_1 = E_2$

$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$

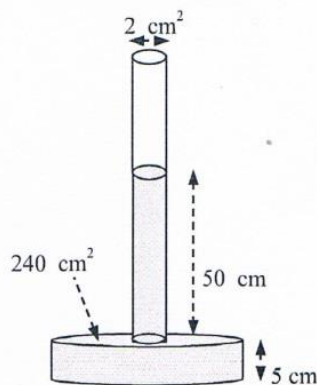
$v_1^2 - v_2^2 = 2GM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$

$(7.727 v_2)^2 - v_2^2 = \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} (5.98 \times 10^{24})}{6370 \times 10^3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right)$

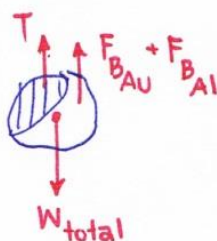
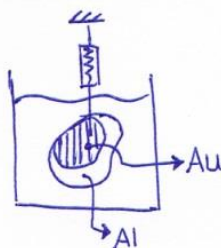
$\therefore v_2 = 1.03 \times 10^3 \text{ m/s}$

$v_1 = 7.96 \times 10^3 \text{ m/s} \#$

9. กระป๋องใบหนึ่งมีพื้นที่หน้าตัด 240 cm^2 สูง 5.0 cm ที่ผาด้านบนเจาะรู แล้วนำหลอดแก้วปลายเปิดซึ่งรูหลอดมีพื้นที่หน้าตัด 2 cm^2 มาติดอยู่ดังรูป เมื่อเติมปรอทลงไปจนระดับปรอทในหลอดแก้วสูง 50 cm จงหา ความดันเกจ แรงดันปรอทที่กั้นกระป๋อง น้ำหนักทั้งหมดของปรอท และ เพราะเหตุใดแรงที่ปรอทดันกระป๋องและน้ำหนักของ ปรอทจึงไม่เท่ากัน กำหนดให้ ความหนาแน่นของปรอท $= 13.6 \text{ g/cm}^3$ (8 คะแนน)



10. โลหะผสมอลูมิเนียมและทองหนัก 49 N แขวนกับตาชั่งสปริง แล้วจุ่มลงในน้ำอ่านน้ำหนักได้ 39.2 N จงหาน้ำหนักของทองในโลหะผสมนี้ กำหนด ความหนาแน่นของอลูมิเนียมและทอง $= 2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ และ $= 19.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ตามลำดับ



สมมติมี ทอง น.น. $x \text{ N}$

Aluminium น.น. $(49-x) \text{ N}$

$\uparrow = \downarrow$

$$T + F_{B,Au} + F_{B,Al} = W$$

$$39.2 + (\rho_L V g)_{Au} + (\rho_L V g)_{Al} = 49$$

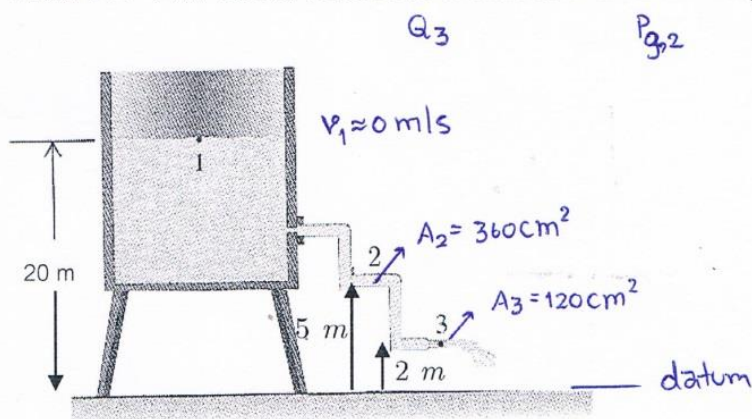
$$\rho_w \left(\frac{m}{\rho} \right) g + \rho_w \left(\frac{m}{\rho} \right) g = 9.8$$

$$\frac{10^3 x}{19.3 \times 10^3} + \frac{10^3 (49-x)}{2.5 \times 10^3} = 9.8$$

$$2.5x + 19.3(49-x) = 2.5 \times 19.3 \times 9.8$$

$$x = 28.15 \text{ N}$$

11. น้ำไหลออกจากถังเปิดขนาดใหญ่ผ่านท่อดังรูป ถ้าท่อที่จุด 2 และ 3 มีพื้นที่ภาคตัด 360 cm² และ 120 cm² ตามลำดับ จงหา อัตราการไหลของน้ำจากถัง และความดันเกจที่จุด 2 (10 คะแนน)



$$1) \quad Q_3 = A_3 v_3 \quad \text{--- ①}$$

$$\text{จาก } P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_3 + \frac{1}{2} \rho v_3^2 + \rho g h_3$$

$$2g(h_1 - h_3) = v_3^2$$

$$v_3 = \sqrt{2(9.81)(20-2)} = 18.79 \text{ m/s}$$

$$\therefore Q_3 = (120 \times 10^{-4}) 18.79$$

$$= 0.2255 \text{ m}^3/\text{s} \quad \#$$

$$2) \quad P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 = P_3 + \frac{1}{2} \rho v_3^2 + \rho g h_3$$

$$(P_{g,2} + P_{atm}) + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 = P_{atm} + \frac{1}{2} \rho v_3^2 + \rho g h_3$$

$$P_{g,2} = \frac{1}{2} \rho [v_3^2 - v_2^2] + \rho g (h_3 - h_2)$$

$$= \frac{1}{2} (10^3) [18.79^2 - 6.26^2] + 10^3 (9.81) (2-5)$$

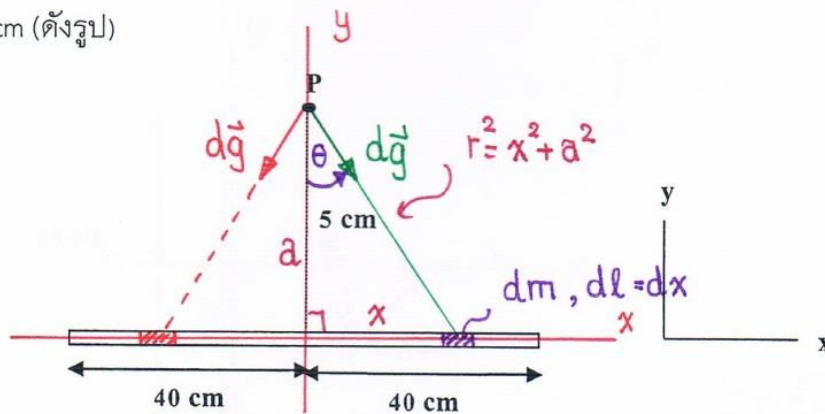
$$\therefore P_{g,2} = 1.28 \times 10^5 \text{ Pa} \quad \#$$

$$A_2 v_2 = A_3 v_3$$

$$v_2 = \frac{120 (18.79)}{360}$$

$$= 6.26 \text{ m/s}$$

7. จงหาสนามโน้มถ่วงที่จุด P จากวัตถุรูปแท่งสม่ำเสมอมวล 500 kg ยาว 80.0 cm โดยจุด P ห่างจากวัตถุรูปแท่ง 5.0 cm (ดังรูป) (10 คะแนน)



step 1 $dm = \lambda dl = \lambda dx$

step 2 $dg = \frac{G dm}{r^2} = \frac{G \lambda dx}{r^2}$

step 3 $\vec{g} = g_x(\hat{e}_x) + g_y(\hat{e}_y)$

สมมาตร

$$g_y = \int dg_y = \int dg \cos \theta$$

$$= \int \frac{G \lambda}{r^2} \cos \theta dx = G \lambda \int \frac{\cos \theta}{r^2} dx \quad \text{ป.ป.ตามมวล dm}$$

$$= G \lambda \int \frac{\cos \theta}{x^2 + a^2} dx$$

$$x = a \tan \theta$$

$$dx = a \sec^2 \theta d\theta$$

$$= G \lambda \int \frac{\cos \theta (a \sec^2 \theta) d\theta}{(a \tan \theta)^2 + a^2}$$

$$= \frac{G \lambda}{a^2} \int \frac{\cos \theta (\sec^2 \theta) d\theta}{(\tan^2 \theta + 1)} = \frac{G \lambda}{a} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta$$

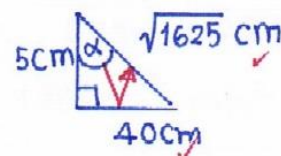
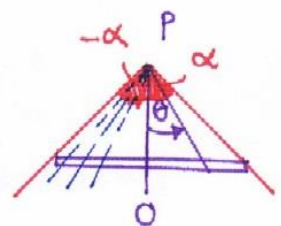
$$= \frac{G \lambda}{a} [\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{G \lambda}{a} [\sin \alpha - \sin(-\alpha)]$$

$$= \frac{G \lambda}{a} [2 \sin \alpha] = \frac{2 G}{a} \left(\frac{M}{L} \right) \sin \alpha$$

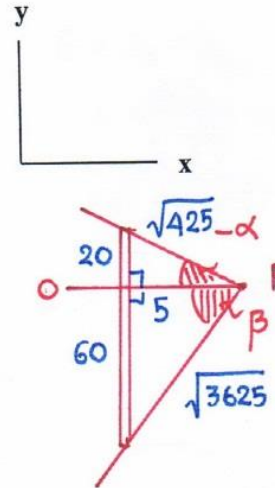
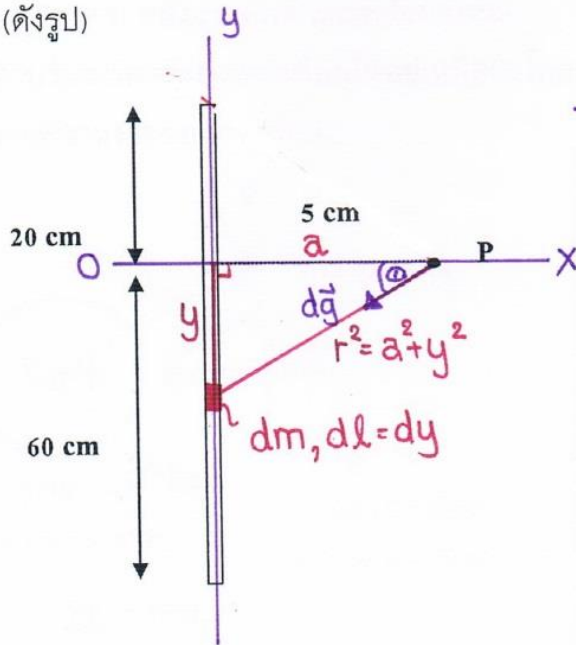
$$= \frac{2 (6.67 \times 10^{-11})}{0.05} \left[\frac{500}{0.8} \right] \frac{40}{\sqrt{1625}}$$

$$= 1.65 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$$

$$\therefore \vec{g} = 1.65 \times 10^{-6} (-\hat{e}_y) \text{ m/s}^2$$



8. จงหาสนามโน้มถ่วงที่จุด P จากวัตถุรูปแท่งสม่ำเสมอมวล 500 kg ยาว 60.0 cm โดยจุด P ห่างจากวัตถุรูปแท่ง 5.0 cm (ดังรูป) (15 คะแนน)



step 1 $dm = \lambda dl = \lambda dy$

step 2 $dg = \frac{G dm}{r^2} = \frac{G \lambda dy}{a^2 + y^2}$

step 3 $\vec{g} = g_x(-\hat{e}_x) + g_y(-\hat{e}_y)$

$$g_x = \int dg_x = \int dg \cos \theta$$

$$= \int \frac{G \lambda}{a^2 + y^2} \cos \theta dy$$

$$= G \lambda \int \frac{\cos \theta (a \sec^2 \theta) d\theta}{a^2 (1 + \tan^2 \theta)}$$

$$= \frac{G \lambda}{a} \int_{-\alpha}^{\beta} \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{G \lambda}{a} \sin \theta \Big|_{-\alpha}^{\beta} = \frac{G \lambda}{a} [\sin \beta - \sin(-\alpha)]$$

$$= \frac{G}{a} \left(\frac{M}{L} \right) [\sin \beta + \sin \alpha]$$

$$= \frac{6.67 \times 10^{-11}}{0.05} \left[\frac{500}{0.8} \right] \left(\frac{60}{\sqrt{3625}} + \frac{20}{\sqrt{425}} \right)$$

$$= 1.64 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$$

$$g_y = \int dg_y = \int dg \sin \theta$$

$$= \frac{G \lambda}{a} \int_{-\alpha}^{\beta} \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{G \lambda}{a} [-\cos \theta]_{-\alpha}^{\beta}$$

$$= -\frac{G \lambda}{a} [\cos \beta - \cos(-\alpha)]$$

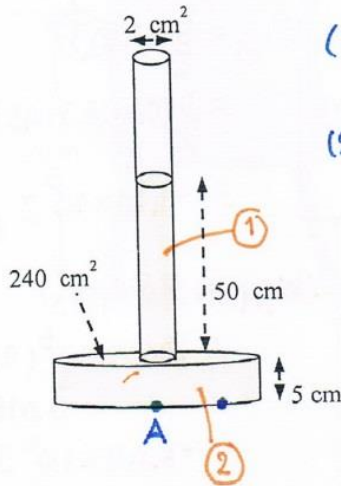
$$= -\frac{G}{a} \left(\frac{M}{L} \right) [\cos \beta - \cos \alpha]$$

$$= -\frac{6.67 \times 10^{-11}}{0.05} \left[\frac{500}{0.8} \right] \left(\frac{5}{\sqrt{3625}} - \frac{5}{\sqrt{425}} \right)$$

$$= 1.33 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{g} = 1.64 \times 10^{-6}(-\hat{e}_x) + 1.33 \times 10^{-7}(-\hat{e}_y) \text{ m/s}^2$$

9. กระป๋องใบหนึ่งมีพื้นที่หน้าตัด 240 cm^2 สูง 5.0 cm ที่ผาด้านบนเจาะรู แล้วนำหลอดแก้วปลายเปิดซึ่งรูหลอดมีพื้นที่หน้าตัด 2 cm^2 มาติดอยู่ดังรูป เมื่อเติมปรอทลงไปจนระดับปรอทในหลอดแก้วสูง 50 cm จงหา ความดันเกจ แรงดันปรอทที่กั้นกระป๋อง น้ำหนักทั้งหมดของปรอท และ เพราะเหตุใดแรงที่ปรอทดันกระป๋องและน้ำหนักของปรอทจึงไม่เท่ากัน กำหนดให้ ความหนาแน่นของปรอท $= 13.6 \text{ g/cm}^3$ (8 คะแนน)



$$(1) P_{gA} = \rho g h = (13.6 \times 10^3) (9.81) \left(\frac{55}{100} \right) = 7.34 \times 10^4 \text{ Pa} \#$$

$$(2) W = (mg)_{Hg} = \rho V g \quad \text{shape}$$

$$= 13.6 \times 10^3 [ah + AH] g$$

$$= 13.6 \times 10^3 [2 \times 50 + 240 \times 5] \times 10^{-6} \times 9.81$$

$$= 173.44 \text{ N} \#$$

cm² cm

$$V = Ah$$

$$(3) F = P(A) = 7.34 \times 10^4 \times (240 \times 10^{-4}) = 1761.6 \text{ N} \#$$

↓
กั้น

(4) น.น. ขึ้นกับ shape หนักขึ้นกับมวล
แต่ F ไม่ขึ้นกับ shape #

10. โลหะผสมอลูมิเนียมและทองหนัก 49 N แขวนกับตาชั่งสปริง แล้วจุ่มลงในน้ำอ่านน้ำหนักได้ 39.2 N จงหาน้ำหนักของทองในโลหะผสมนี้ กำหนดความหนาแน่นของอลูมิเนียมและทอง $= 2.5 \times 10^3$ และ $= 19.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ตามลำดับ