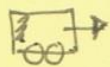


JP's Trick

1)

$$v = u + at$$



$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

เชิงเส้น	s	u	v	a	t	m	F	p	E _k
เชิงมุม	θ	ω_0	ω	α	t	I	τ	L	E _{k,r} → rotation
	rad	rad/s	rad/s	rad/s ²		โมเมนต์ความเฉื่อย (ตัวการหมุน) I ↑ หมุนยาก	torque		
								Momentum	

2)

4 สูตร

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$v = u + at \rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$v^2 = u^2 + 2as \rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

$$s = \left(\frac{u+v}{2}\right)t \rightarrow \theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right)t$$

3)

$$\rightarrow 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$\rightarrow 1 \text{ รอบ} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$$N = \frac{\theta}{2\pi}$$

จ.ห.รอบ (rev.)



$$v = \omega R$$

$$a = \alpha R$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$



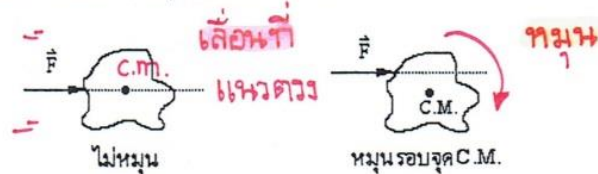
Rigid body Rotational Motion

CHAPTER 4

พารามิเตอร์เบื้องต้นและสมการเกี่ยวกับการหมุน

การหมุนเป็นการเคลื่อนที่รอบแกนหมุนแกนหนึ่ง และถ้าพิจารณาแต่ละส่วนของวัตถุ จะมีการเคลื่อนที่เป็นแนววงกลม โดยวัตถุจะเกิดการหมุนเมื่อมีโมเมนต์ (หรือทอร์ก) มากกระทำ โดยจะมีลักษณะการหมุน 2 แบบ กล่าวคือ

1. ถ้าวัตถุสามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระจะเกิดการหมุน เมื่อแนวแรงไม่ผ่านจุด C.M. และวัตถุนั้นจะมีการหมุนรอบจุดศูนย์กลางมวล



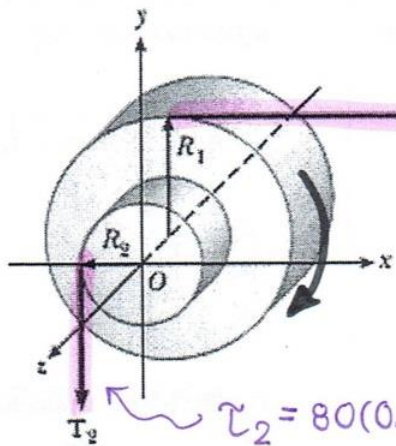
2. ถ้าวัตถุนั้นถูกยึดด้วยแกนหมุน เช่น ไขว่ตอม จะเกิดการหมุนเมื่อแนวแรงไม่ผ่านแกนหมุนและวัตถุนั้นจะหมุนรอบแกนหมุนนั้น



◇ ข้อเปรียบเทียบระหว่างการเคลื่อนที่แนวตรง (ปริมาณเชิงเส้น) กับการเคลื่อนที่แบบหมุน (ปริมาณเชิงมุม)

หัวข้อเปรียบเทียบ	ปริมาณเชิงเส้น	ปริมาณเชิงมุม
① การกระจัด	S	θ
② ความเร็ว	$v = \frac{\Delta S}{t}$	$\omega = \frac{\Delta \theta}{t}$
③ ความเร่ง	$a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{v-u}{t}$	$\alpha = \frac{\Delta \omega}{t} = \frac{\omega - \omega_0}{t}$
④ สมการการเคลื่อนที่ (4 สูตรหาгин)	$v = u + at$ $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 = u^2 + 2as$ $s = \left(\frac{u+v}{2}\right)t$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$ $\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right)t$
⑤ ปริมาณต้านการเคลื่อนที่	มวล = m	โมเมนต์ความเฉื่อย $I = mR^2$
⑥ ปริมาณที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่	$\sum F = ma$	$\sum \tau = I\alpha$
⑦ โมเมนตัม	$P = mv$	$L = I\omega$
⑧ พลังงานจลน์	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$E_{k,r} = \frac{1}{2}I\omega^2$
⑨ งาน	$W = FS$	$W = \tau\theta$
⑩ กำลัง	$P = \frac{W}{t} = FV$	$P = \tau\omega$

Ex จากรูปจงคำนวณหาค่าทอร์กลัพธ์ถ้ากำหนดให้ $T_1 = 100 \text{ N}$, $T_2 = 80 \text{ N}$, $R_1 = 40 \text{ cm}$ และ $R_2 = 25 \text{ cm}$



$\tau_1 = 100(0.4) = 40 \text{ Nm}$

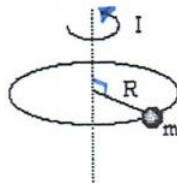
$\Sigma \tau = \tau_1 - \tau_2 = 20 \text{ Nm}$ #

$\tau_2 = 80(0.25) = 20 \text{ Nm}$

(e) โมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of inertia, I) เป็นปริมาณที่บอกสมบัติต้านการเปลี่ยนสภาพการหมุนของวัตถุนั้น (คล้ายมวลในการเคลื่อนที่แบบเส้นตรง) หรือความเฉื่อยของการหมุนของวัตถุเป็นปริมาณ Scalar พิจารณา

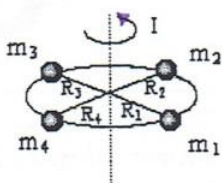
- การหมุนของวัตถุเล็ก ๆ อนุภาคเดียว

$I = mR^2$ หน่วย $\text{kg} \cdot \text{m}^2$



$I \uparrow$ หมุนยาก

- การหมุนของวัตถุเล็ก ๆ หลายอนุภาค

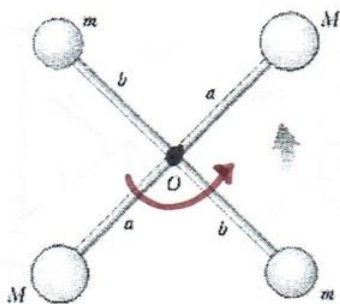


โมเมนต์ความเฉื่อย = ผลบวกโมเมนต์ความเฉื่อยย่อย

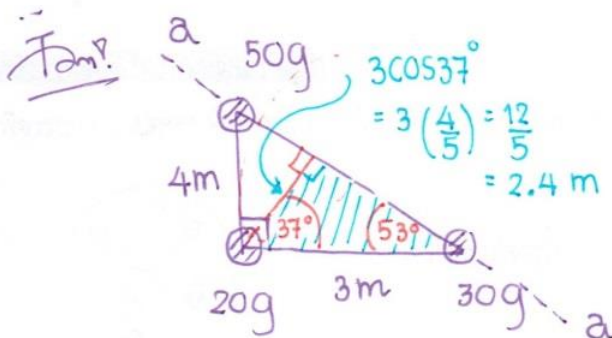
$I = \sum m_i R_i^2$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots$

$I = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2 + \dots$

Ex1 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของระบบดังรูป



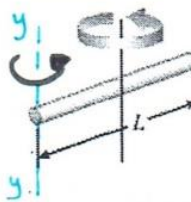
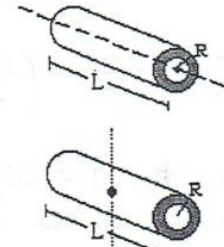
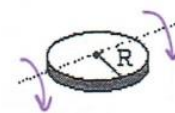
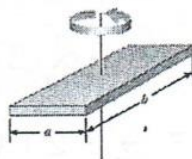
$I = mb^2 + Ma^2 + mb^2 + Ma^2 = 2mb^2 + 2Ma^2$ #



$I_{aa} = mR^2 = \frac{2\phi}{100\phi} (2.4)^2 = 0.1152 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ #

Special

I shape จับกับแกนหมุน

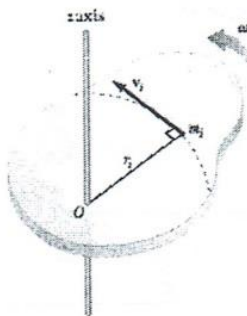
รูปทรงพร้อมแกนหมุน	โมเมนต์ความเฉื่อย ($I, \text{kg} \cdot \text{m}^2$)	รูปทรงพร้อมแกนหมุน	โมเมนต์ความเฉื่อย ($I, \text{kg} \cdot \text{m}^2$)
1. เส้นลวดตรงหน้าตัดเล็ก 	$I = \frac{1}{12} mL^2$ $I_{yy} = \frac{1}{3} mL^2$	4. ทรงกระบอกกลวง 	$\star I = mR^2$ $I = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12} \right)$
2. แผ่นกลม, ทรงกระบอกตัน  	$\star I = \frac{1}{2} mR^2$ $I = \frac{1}{4} mR^2$	5. ทรงกลม 	$I = \frac{2}{5} mR^2$
3. วงแหวน 	$\star I = mR^2$	6. แผ่นสี่เหลี่ยม 	$I = m \left(\frac{a^2 + b^2}{12} \right)$

การชนเชิงมุม : เพื่อชนกัน

(f) **โมเมนตัมเชิงมุม** (Angular momentum, $\vec{L}$) คือผลคูณระหว่างโมเมนต์ความเฉื่อยและความเร็วเชิงมุม หรืออาจกล่าวได้ว่าเป็นโมเมนต์ของโมเมนตัมเชิงเส้น ทิศ : ใช้หลักกฎมือขวา โดยมีทิศเดียวกับความเร็วเชิงมุม (ω)

- พิจารณาการหมุนของวัตถุชิ้นเดียว

$$p = mv$$



ดังนั้น

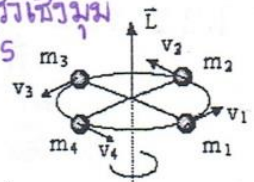
$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$L = mvr$$

Js kg m/s

ความเร็วเชิงมุม
rad/s

- พิจารณาการหมุนของวัตถุเล็ก ๆ หลายอนุภาค



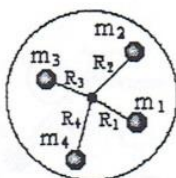
ดังนั้น

$$L = \sum I_i \omega_i$$

$$L = I\omega = mR^2 \left(\frac{v}{R} \right) = mvr$$

(g) **พลังงานจลน์ในการหมุน** (E_{kr})

พิจารณามวลย่อย ๆ ที่ประกอบเป็นวัตถุซึ่งกำลังหมุนรอบจุด A ซึ่งเมื่อหมุนครบรอบพร้อมกันจะมี ω เท่ากัน



ดังนั้นสำหรับวัตถุชิ้นเดียว

$$E_{kr} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \dots \star \text{ หน่วย J}$$

เดิม $E_k = \frac{1}{2} mv^2$

แบบ 1 ใช้ 4 สูตร → ระบบมี α

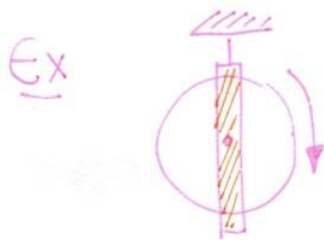
$$v = u + at \rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$s = \left(\frac{u+v}{2}\right)t \rightarrow \theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right)t$$

$$v^2 = u^2 + 2as \rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

↑ round, cycle
 $N = \frac{\theta}{2\pi}$



$$\omega_0 = 4 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 8 \text{ rad/s}$$

$$t = 2 \text{ s จงหา}$$

ความถี่เชิงมุม

↑
 α, N

↳ จ.น รอบ

Solⁿ ▶ $\omega = \omega_0 + \alpha t$

$$8 = 4 + \alpha(2)$$

$$\alpha = \frac{4}{2} = 2 \text{ rad/s}^2 \quad \#$$

▶ $N = \frac{\theta}{2\pi} \sim$ มุมที่หมุนได้

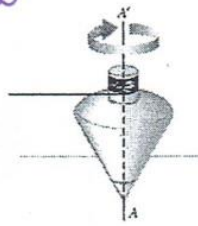
$$= \frac{12}{2\pi}$$

$$= 1.91 \text{ รอบ} \quad \#$$

$$\begin{aligned} \theta &= \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right)t \\ &= \left(\frac{4 + 8}{2}\right)2 \\ &= 12 \text{ rad} \end{aligned}$$

Ent 1 ลูกข่างกำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม 10 เรเดียน/วินาที ด้วยความเร่งเชิงมุม 2 เรเดียน/วินาที² อีกนานเท่าไรลูกข่างจึงจะมี
ความเร็วเชิงมุม 20 เรเดียน/วินาที

1. 5 s
2. 4 s
3. 3 s
4. 2 s



t

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$20 = 10 + 2t$$

$$10 = 2t$$

$$t = 5 \text{ s}$$

Ent 2 จากโจทย์ข้อ 1 ถ้าใช้เวลา 3 วินาที ลูกข่างจะหมุนได้กี่รอบ

1. $\frac{20}{\pi}$ cycles
2. $\frac{20}{2\pi}$ cycles
3. $\frac{39}{\pi}$ cycles
4. $\frac{39}{2\pi}$ cycles

$$N = \frac{\theta}{2\pi} \quad \text{--- ①}$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$= 10(3) + \frac{1}{2}(2)3^2$$

$$= 39 \text{ rad}$$

$$\therefore N = \frac{39}{2\pi} \text{ cycles \#}$$

Ent 3 วงล้ออันหนึ่งกำลังหมุนด้วยอัตรา 10 รอบ/วินาที ถ้าวงล้อนี้ถูกกระทำด้วยแรงคงที่ค่าหนึ่งแล้วหยุดนิ่งในเวลา 15 วินาที
นับตั้งแต่แรงเริ่มกระทำจนถึงวงล้อหยุดหมุน วงล้อนี้หมุนไปได้ทั้งหมดกี่รอบ

1. 75 รอบ
2. 150 รอบ
3. 472 รอบ
4. 600 รอบ

$$f = 10 \text{ รอบ/วินาที} \quad t = 15 \text{ s}$$

$$\omega_0 = 2\pi f \rightarrow \omega = 0$$

$$= 2\pi(10)$$

$$= 20\pi \text{ rad/s}$$

$$N = \frac{\theta}{2\pi} \quad \text{--- ①}$$

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} \right) t$$

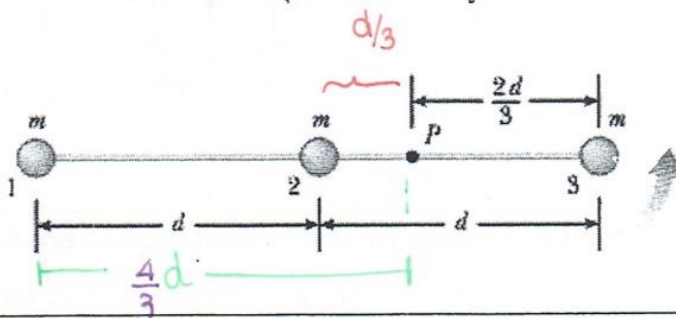
$$\therefore N = \frac{150\pi}{2\pi}$$

$$= \frac{(20\pi + 0)}{2} 15$$

$$= 150\pi \text{ rad}$$

$$= 75 \text{ รอบ \#}$$

Ent 4 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุด P ที่กำหนดดังรูป

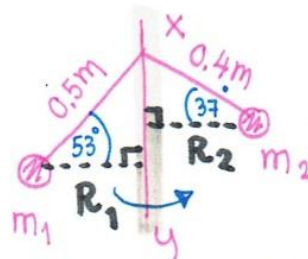
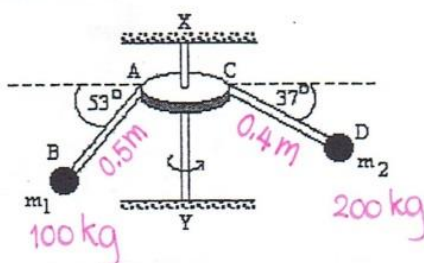


$$I_P = m \left(\frac{2d}{3} \right)^2 + m \left(\frac{d}{3} \right)^2 + m \left(\frac{4d}{3} \right)^2$$

$$= m \frac{d^2}{9} (4 + 1 + 16)$$

$$= \frac{7}{3} m d^2 \quad \#$$

Ent 5 จากรูป คาน AB และ CD เป็นคานแข็งเบายาว 0.5 และ 0.4 เมตร ตามลำดับ ที่ปลายคาน AB และ CD ติดด้วยมวล
100 และ 200 กิโลกรัม ตามลำดับ โมเมนต์ความเฉื่อยของ m_1 และ m_2 รวมกันเป็นกี่กิโลกรัม·เมตร² เมื่อมีการหมุนรอบ
แกน XY



$$R_1 = 0.5 \cos 53^\circ = 0.3 \text{ m}$$

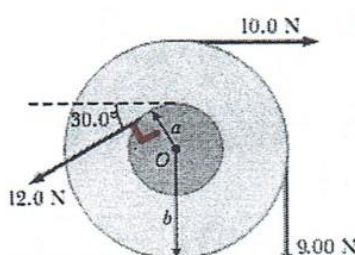
$$R_2 = 0.4 \cos 37^\circ = 0.32 \text{ m}$$

$$I = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2$$

$$= 100 (0.3)^2 + 200 (0.32)^2$$

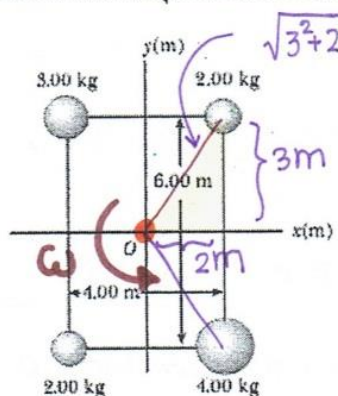
$$= 29.48 \text{ kg.m}^2 \quad \#$$

Ent 6 Find the net torque on the wheel in figure about the axle through O if $a = 10 \text{ cm}$ and $b = 25 \text{ cm}$



$\tau_1 = 10(0.25) = 2.5 \text{ Nm}$
 $\tau_2 = 9(0.25) = 2.25 \text{ Nm}$
 $\tau_3 = 12(0.1) = 1.2 \text{ Nm}$
 $\Sigma \tau = 2.5 + 2.25 - 1.2 = 3.55 \text{ Nm}$ #

Ent 7 ระบบที่กำหนดหมุนรอบแกน Z ด้วยความเร็วเชิงมุม 3 เรเดียน/วินาที จงหาค่าโมเมนต์เชิงมุมของระบบนี้

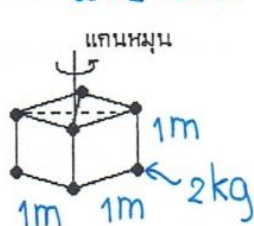


$L = I\omega = [m_1 R_1^2 + \dots + m_4 R_4^2] \omega$
 $= [2\sqrt{13}^2 + 4\sqrt{13}^2 + 2\sqrt{13}^2 + 3\sqrt{13}^2] 3$
 $= 11(13) 3 = 429 \text{ J}\cdot\text{s}$ #

Ent 8 โครงรูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์เบาขนาดด้านละ 1 เมตร ที่ทุกมุมมีมวล 2 กิโลกรัมติดอยู่ ถ้าขณะนั้นโครงสร้างสี่เหลี่ยมกำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม 2 เรเดียน/วินาที จงคำนวณหาพลังงานจลน์เนื่องจากการหมุน

1. 12 J
2. 16 J
3. 20 J
4. 24 J

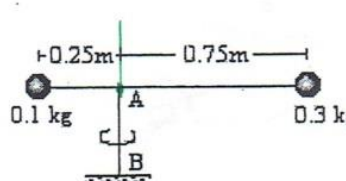
$\omega = 2 \text{ rad/s}$



$E_{k,r} = \frac{1}{2} I \omega^2$
 $= \frac{1}{2} [8mR^2] \omega^2$
 $= 4(2)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 2^2$
 $= 8\left(\frac{2}{4}\right) 4 = 16 \text{ J}$ #

Top View
 $R = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m}$

Ent 9 วัตถุมวล 0.1 กิโลกรัมและ 0.3 กิโลกรัมติดอยู่กับปลายทั้งสองของโลหะเบา 1.00 เมตรดังรูป จงหาพลังงานจลน์ของการหมุน ถ้าแท่งโลหะหมุนรอบแกน AB 10 เรเดียน/วินาที (Ent 40)



$E_{k,r} = \frac{1}{2} I \omega^2$
 $= \frac{1}{2} [0.1(0.25)^2 + 0.3(0.75)^2] 10^2$
 $= 8.75 \text{ J}$ #

1. 3.75 J
2. 5.63 J
3. 7.50 J
4. 15.0 J
5. 8.75 J

Ent 10 ม้าหมุนมีโมเมนต์ความเฉื่อย $900 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ หมุนรอบแกนแนวดิ่ง โดยมีคาบการหมุน 0.5 วินาที พลังงานจลน์ของการหมุนของม้าหมุนนี้เป็นเท่าไร

$$E_{k,r} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (900) (4\pi)^2 = 71,061.15 \text{ J}$$

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi$$

Ent 11 ในการโฆษณาวิทยุหนึ่ง ผู้โฆษณากล่าวว่ารถยนต์ของเขาสามารถให้กำลังม้าสูงสุด 150 กำลังม้า ที่อัตราการหมุน 5,400 รอบ/นาที แสดงว่าในอัตราการหมุนของเครื่องยนต์ตามที่โฆษณานั้น จะเกิดทอร์กกี่นิวตัน·เมตร

Concept

$$P = \frac{W}{t} = Fv \rightarrow W = Fs$$

$$P = \tau \omega \rightarrow W = \tau \theta$$

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$$

$$P = \tau \omega \rightarrow \tau = \frac{P}{\omega}$$

$$150 \times 746 = \tau (2\pi \times 90)$$

$$\tau = 197.88 \text{ Nm}$$

$$f = \frac{5400 \text{ รอบ}}{1 \text{ min}} = \frac{5400}{60} \frac{\text{รอบ}}{\text{s}} = 90 \frac{\text{รอบ}}{\text{s}}$$

แบบ 2

ความสัมพันธ์ของตัวแปรปริมาณเชิงมุมและเชิงเส้น

ออกสอบมากที่สุด

① ความสัมพันธ์ระหว่าง a และ α

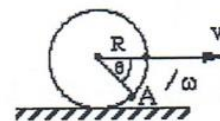
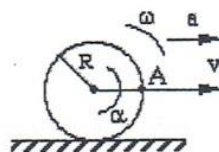
พิจารณาการหมุนอยู่กับที่ในช่วง θ ดังรูป

จาก $v = \omega R$ (1)

$$\frac{(1)}{t}; \frac{v}{t} = \frac{\omega}{t} R$$

จะได้ $a = \alpha R$

$$v = \omega R$$



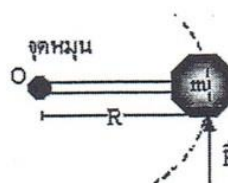
② ความสัมพันธ์ระหว่าง τ , I และ α

พิจารณาจากรูปออกแรง F กระทำต่อมวล m ซึ่งติดอยู่กับที่ปลายคันเบียว R หมุนได้คล่องรอบจุด O

จาก $F = ma$

$$FR = maR \quad (a = \alpha R)$$

$$\tau = mR^2 \quad \text{จะได้} \quad \tau = I\alpha$$

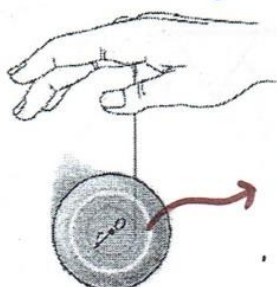


กฎนิวตันเชิงมุม
สำหรับแรงภายนอก
มากระทำ

Trick การทำโจทย์ระบบหมุน.....

1)

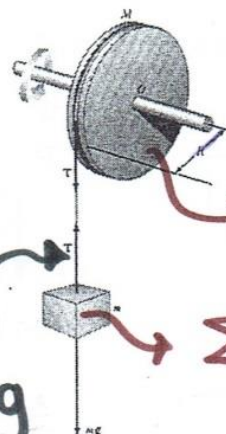
หมุนอย่างเดียว



$$\tau = I\alpha$$

2)

หมุน + แนวตรง



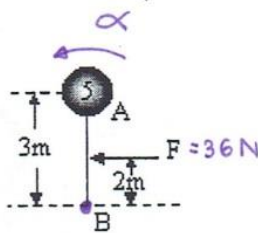
$$\tau = I\alpha \text{ (หมุน)}$$

$$\Sigma F = ma \text{ (เลื่อนที่)}$$

$T \neq mg$
(ไม่สมดุล)

Ent 12 คานเบา AB ยาว 3 เมตร ปลาย A มีมวล 5 กิโลกรัมติดอยู่ ส่วนปลาย B เป็นจุดหมุนตรงที่ทำให้คานหมุนได้คล่องในระนาบราบ เมื่อมีแรง F ขนาด 36 นิวตัน กระทำอย่างตั้งฉากกับคานกระทำห่างจาก B ไปเป็นระยะ 2 เมตร ดังรูป ปลาย A จะมีความเร่งเชิงมุมกี่เรเดียน/วินาที?

1. 0.2
2. 0.8
3. 1.6
4. 2.4



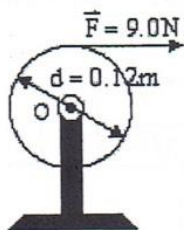
$$\tau = I\alpha$$

$$36(2) = (5)3^2 \alpha$$

$$\alpha = \frac{8}{5} = 1.6 \text{ rad/s}^2$$

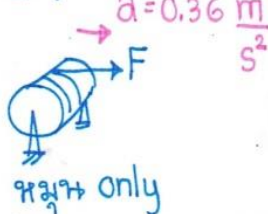
#

Ent 13 ทรงกระบอกเส้นผ่านศูนย์กลาง 0.12 เมตร เมื่อดึงเชือกที่พันรอบทรงกระบอกด้วยแรง 9.0 นิวตัน พบว่าเชือกมีความเร่ง 0.36 เมตรต่อวินาที² จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกระบอก (Ent 41)



1. 0.05 kg·m²
3. 0.12 kg·m²

$$I = ?$$



2. 0.09 kg·m²
4. 1.20 kg·m²

$$\tau = I\alpha$$

$$FR = I \frac{a}{R}$$

$$9(0.06) = I \frac{0.36}{0.06}$$

$$I = 0.09 \text{ kg·m}^2$$

#

Ent 14 ล้อเหล็กมีโมเมนต์ความเฉื่อย 100 กิโลกรัม-เมตร² กำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงตัว 100 เรเดียน/วินาที เมื่อจะบังคับให้ล้อเหล็กหยุดหมุนภายใน 0.5 วินาที จะต้องกดห้ามล้อเพื่อให้เกิดแรงกระทำตรงผิวสัมผัส ระหว่างห้ามล้อกับล้อเหล็กเท่าไร ถ้าล้อเหล็ก มีรัศมี 50 เซนติเมตร

1. 10,000 N
2. 20,000 N
3. 30,000 N
4. 40,000 N



$$\omega_0 = 100 \text{ rad/s} \rightarrow \omega = 0 \text{ rad/s}$$

$$F = ?$$

$$\tau = I\alpha$$

$$-FR = I \left(\frac{\omega - \omega_0}{t} \right)$$

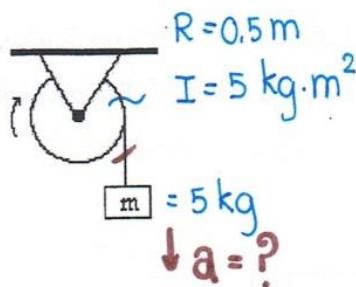
$$-F(0.5) = 100 \left[\frac{0 - 100}{0.5} \right]$$

$$F = +40,000 \text{ N}$$

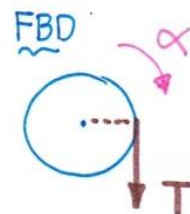
#

Ent 15 จากรูป รอกมีโมเมนต์ความเฉื่อย 5 กิโลกรัม-เมตร² รัศมี 0.5 เมตร มีเชือกพันไว้หลายรอบ โดยที่ปลายอีกข้างหนึ่งของเชือกผูกกับมวล m ขนาด 5 กิโลกรัม เมื่อปล่อยให้มวล m เคลื่อนที่อย่างอิสระ มวล m จะตกลงมาด้วยความเร่งเท่าไร

1. 2 m/s²
2. 4 m/s²
3. 8 m/s²
4. 10 m/s²

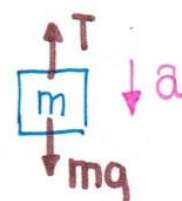


$$a = ?$$



$$\tau = I\alpha$$

$$TR = I \frac{a}{R}$$



$$\Sigma F = ma$$

$$mg - T = ma$$

$$50 - T = 5a \quad \text{--- (2)}$$

$$\tau = I\alpha$$

$$50(0.5)^2 = (5 + \frac{5}{4})a$$

$$T(0.5) = 5 \frac{a}{0.5}$$

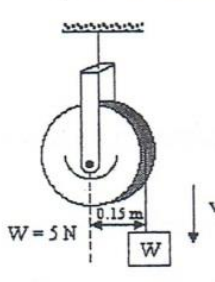
$$T = 20a \quad \text{--- (1)}$$

$$50 - 20a = 5a$$

$$50 = 25a \rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

อาจารย์ พี่จ๊อ

Ent 16 รอกหนักมี 0.15 เมตร มีเส้นเชือกพันรอบ ที่ปลายเชือกมีน้ำหนักแขวนอยู่ 5 นิวตัน ขณะเริ่มสังเกตการเคลื่อนที่ของน้ำหนัก รอกกำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม 2 เรเดียนต่อวินาที หลังจากนั้นอีก 3 วินาที พบว่ารอกหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม 3 เรเดียนต่อวินาที โมเมนต์ความเฉื่อยของรอกมีค่าเท่าใดในหน่วย $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ (Ent'38 เต็มคำ)

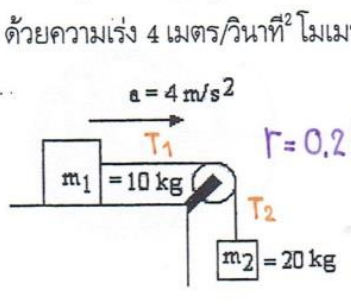


$\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$
 $t = 3 \text{ s}$
 $\omega = 3 \text{ rad/s}$
 $W = 5 \text{ N}$
 $r = 0.15 \text{ m}$

$\Sigma \tau = I\alpha$
 $Tr = I(\frac{\omega - \omega_0}{t})$
 $4.975(0.15) = I(\frac{3-2}{3})$
 $I = 2.24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

$\Sigma F = ma$
 $5 - T = 0.5a$
 $5 - T = 0.5(\frac{3-2}{3})0.15 \rightarrow T = 4.975 \text{ N}$

Ent 17 มวล m_1 และ m_2 ผูกต่อกันด้วยเชือกเบา คล้องผ่านรอกที่มีรัศมี 0.25 เมตร พบว่า มวล m_1 เคลื่อนที่ตามพื้นราบเกลี้ยงด้วยความเร็ว 4 เมตร/วินาที โมเมนต์ความเฉื่อยของรอกมีค่ากี่ กิโลกรัม · เมตร²



$a = 4 \text{ m/s}^2$
 $r = 0.25 \text{ m}$
 $m_1 = 10 \text{ kg}$
 $m_2 = 20 \text{ kg}$

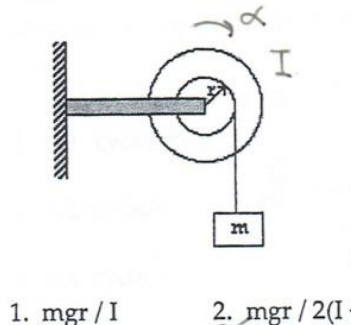
$\Sigma F = ma$
 $T_1 = 10(4) = 40 \text{ N}$

$\Sigma F = ma$
 $200 - T_2 = 20(4)$
 $T_2 = 120 \text{ N}$

$\Sigma \tau = I\alpha$
 $T_2 R - T_1 R = I \frac{a}{R}$
 $(120 - 40)(0.25)^2 = I(4)$

Hint T ผ่านรอก ค่าเปลี่ยน

Ent 18 ถ้าล้อยมีโมเมนต์ความเฉื่อย I ถูกยึดไว้ให้หมุนรอบแกนได้สะดวกโดยไม่มีแรงเสียดทานมวล m ผูกไว้ด้วยเชือกที่พันรอบเพลารัศมี r จะได้ความเร็วเชิงมุมของล้อเท่าใด (Ent Mar'42)



$\Sigma \tau = I\alpha$
 $Tr = I\alpha$

$\Sigma F = ma$
 $mg - T = ma$

$(mg - mar)r = I\alpha$
 $mgr - mar^2 = I\alpha$
 $mgr = (mr^2 + I)\alpha$
 $\alpha = \frac{mgr}{mr^2 + I}$

$1. mgr / I$
 $2. mgr / 2(I + mr^2)$
 $3. mgr / 2I$
 $4. mgr / (I + mr^2)$

แบบ 3

กฎอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมและการเคลื่อนที่แบบกลิ้ง

$$\omega_1 < \omega_2$$

◆ กฎอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม → หาความเร็วปลายของการหมุน

วัตถุจะมีโมเมนตัมเชิงมุมคงที่ ถ้าไม่มี τ มากระทำ หรือ $\tau = 0$

เช่น การหมุนอยู่บนแป้นหมุนซึ่งหมุนรอบแกนตั้ง, การกระโดดน้ำ, การหมุนตัวขณะเล่นสเกตน้ำแข็ง เป็นต้น

ดังนั้น $\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = 0$
 จะได้ $\Delta L = 0$
 $L_f - L_i = 0$

$I_2 \omega_2 = I_1 \omega_1$
 $I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$

Apply

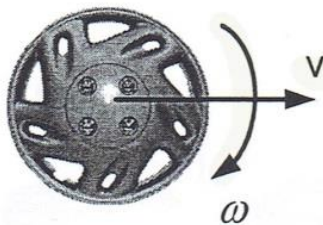
สมการข้างต้นสามารถนำมาประยุกต์กับความถี่ (f) และคาบ (T) การหมุนได้ดังนี้

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2, I_1 f_1 = I_2 f_2, \frac{I_1}{T_1} = \frac{I_2}{T_2}$$

การเคลื่อนที่แบบกลิ้ง (Rolling motion)

การเคลื่อนที่แบบกลิ้ง เป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ และแบบหมุนพร้อมกัน ตัวอย่าง การกลิ้งของล้อรถ, การกลิ้งของลูกฟุตบอล โดยสามารถวิเคราะห์สภาวะการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

- จุดศูนย์กลางมวลของล้อและลูกฟุตบอล จะเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ โดยมีความเร็วเท่ากับ v
- จุดต่างๆ บนล้อและลูกฟุตบอลที่ไม่ใช่จุดศูนย์กลางมวล จะเคลื่อนที่แบบหมุนรอบจุดศูนย์กลางมวลโดยมีความเร็วเท่ากับ ω



ดังนั้น $E_k^{roll} = E_k + E_{k,r}$ เลื่อนที่ หมุน

$$E_k^{roll} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

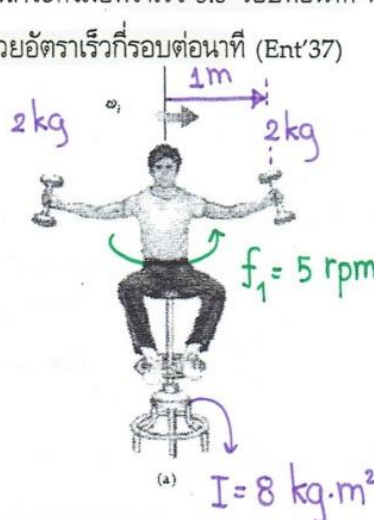
มักใช้ร่วมกัน
 $E_1 = E_2$

สิ่งสำคัญ คือ

$$v = \omega R$$

Ent 19 ชายคนหนึ่งยืนบนแท่นหมุนซึ่งหมุนรอบแกนตั้ง ชายคนนี้และแท่นหมุนมีโมเมนต์ความเฉื่อย 8.0 กิโลกรัม·เมตร² มือแต่ละข้างถือดัมเบลไว้ข้างละอัน ดัมเบลแต่ละอันมีมวล 2.0 กิโลกรัม เขยียดแขนให้มวลดัมเบลอยู่ห่างจากแกนหมุน 1.0 เมตร แล้วหมุนเป็นจนกระทั่งมีอัตราเร็ว 5.0 รอบต่อนาที ต่อไปเขยียดแขนให้ดัมเบลอยู่ห่างจากแกนหมุน 20.0 เซนติเมตร จงหาว่าแท่นจะหมุนด้วยอัตราเร็วกี่รอบต่อนาที (Ent'37)

1. 6.0 cycle/min
2. 6.2 cycle/min
3. 6.6 cycle/min
4. 7.3 cycle/min



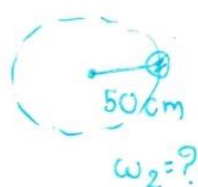
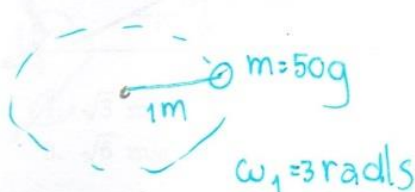
$$I_1 f_1 = I_2 f_2$$

$$(I + 2mR_1^2) f_1 = (I + 2mR_2^2) f_2$$

$$(8 + 2(2)(1)^2) 5 = (8 + 2(2)(0.2)^2) f_2$$

$$f_2 = 7.3 \text{ rpm cycle/min}$$

Ent 20 วัตถุมวล 50 กรัม ผูกติดกับปลายเชือกซึ่งลอดผ่านรูหลอดเล็กๆ ปลายเชือกข้างหนึ่งดึงยึดไว้ด้วยแรงค่าหนึ่ง แล้วเหวี่ยงให้เป็นวงกลมรัศมี 1 เมตร ถ้าดึงเชือกให้รัศมีวงกลมเป็น 50 เซนติเมตรทันที วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเชิงมุมเท่าไรในหน่วยเรเดียน/วินาที ถ้าเดิมมีอัตราเร็วเชิงมุม 3 เรเดียน/วินาที (Ent'40 เต็มค่า)



ไม่มี

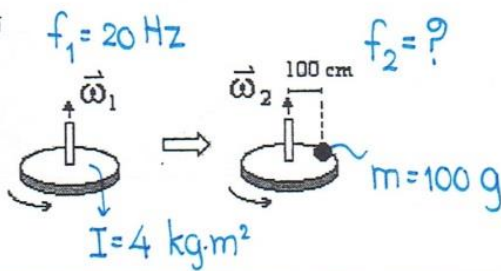
$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

$$m(1)^2 \cdot 3 = m(0.5)^2 \cdot \omega_2$$

$$\omega_2 = 12 \text{ rad/s}$$

Ent 21 จานอันหนึ่ง มีโมเมนต์ความเฉื่อย 4 กิโลกรัม · เมตร² กำลังหมุนด้วยความถี่ 20 เฮิรตซ์ ต่อมาวางดินน้ำมันมวล 100 กรัม บนจานที่กำลังหมุน ห่างจากแกนหมุน 100 เซนติเมตร โดยที่ดินน้ำมันติดจานหมุนตามไปทันที ตอนหลังนี้จานหมุนจะหมุนด้วยความถี่เท่าไร

1. 18.75 Hz
2. 19.00 Hz
3. 19.25 Hz
4. 19.50 Hz

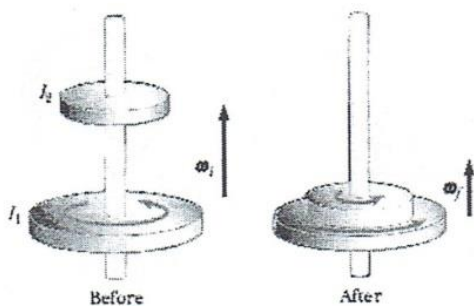


$$I_1 f_1 = (I_1 + I_2) f_2$$

$$4(20) = [4 + 0.1 \times 1^2] f_2$$

$$f_2 = 19.5 \text{ Hz}$$

Ent 22 แผ่นไม้วงกลมมีโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนผ่านจุดศูนย์กลาง 2.0 กิโลกรัม · เมตร² กำลังหมุนรอบแกนกลางด้วยอัตราเร็วเชิงมุม 8π เรเดียน/วินาที เมื่อวางแผ่นไม้วงกลมอีกแผ่นที่เล็กกว่าแผ่นที่หมุนอยู่ซึ่งมีโมเมนต์ความเฉื่อยเป็นครึ่งหนึ่งให้ซ้อนทับกันพอดี ทำให้แผ่นไม้ทั้งสองหมุนไปพร้อมกัน ความถี่ของการหมุนของแผ่นไม้วงกลมทั้งสองแผ่นเป็นกี่รอบ/วินาที



$$I_1 \omega_1 = (I_1 + I_2) \omega$$

$$2(8\pi) = (2 + 1)(2\pi f)$$

$$16\pi = 6\pi f$$

$$f = 2.67 \text{ รอบ/ส}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$= \frac{2\pi}{T}$$

คาบ
เวลาครบรอบ

Ent 23 ทรงกระบอกตันมวล 2 กิโลกรัม มีรัศมี 0.1 เมตร กำลังกลิ้งไปบนพื้นด้วยความเร็ว 4 เมตร/วินาที จงคำนวณหาพลังงาน

จลน์รวมทั้งหมดของทรงกระบอกตัน (กำหนด $I_{\text{ทรงกระบอก}} = \frac{1}{2} m r^2$)

1. 12 J
2. 16 J
3. 20 J
4. 24 J

$$v = 4 \text{ m/s}$$

$$m = 2 \text{ kg}, R = 0.1 \text{ m}$$

$$E_k^{\text{roll}} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} (2) 4^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 0.1^2 \right) \left[\frac{4}{0.1} \right]^2 = 24 \text{ J}$$

Ent 24 แผ่นกลมแบนรัศมี 0.5 เมตร มวล 4 กิโลกรัม มีโมเมนต์ความเฉื่อย 0.5 กิโลกรัม · เมตร² กำลังกลิ้งไปบนพื้นราบสม่ำเสมอโดยไม่มีการไถล ขณะที่แผ่นกลมมีพลังงานจลน์เป็น 12 จูลนั้น จุดศูนย์กลางมวลของแผ่นกลมมีอัตราเร็วเป็นกี่เมตร/วินาที

$$R = 0.5 \text{ m}$$

$$m = 4 \text{ kg}$$

$$I = 0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$v = ?$$

$$E_k^{\text{roll}} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

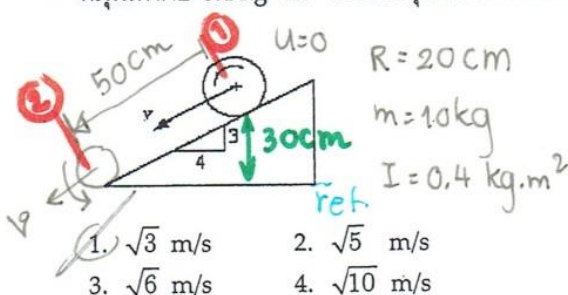
$$12 = \frac{1}{2} (4) v^2 + \frac{1}{2} (0.5) \left(\frac{v}{0.5} \right)^2$$

$$12 = 2v^2 + v^2$$

$$v^2 = 4$$

$$v = 2 \text{ m/s}$$

Ent 25 แผ่นโลหะกลมแบนรัศมี 20 cm มวล 10 kg กลิ้งลงมาตามพื้นเอียงดังรูป โดยเริ่มต้นจากสภาวะหยุดนิ่ง จงหาความเร็ว v ของแผ่นโลหะนี้เมื่อกลิ้งได้ระยะทาง 50 cm ตามแนวบนระนาบเอียงกำหนดให้โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นโลหะรอบแกนหมุนเท่ากับ $0.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ และสมมุติให้การกลิ้งบนพื้นเอียงไม่มีการไถล



$$E_1 = E_2$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$10(10)(0.3) = \frac{1}{2} (10) v^2 + \frac{1}{2} (0.4) \left[\frac{v}{0.2} \right]^2$$

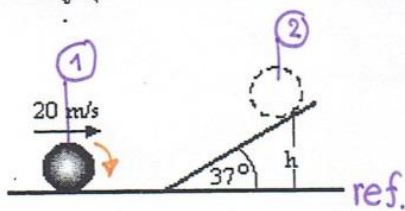
$$30 = 5v^2 + 5v^2$$

$$v^2 = 3$$

$$v = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

Ent 26 วัตถุทรงกลมมวล m กลิ้งไปบนพื้นราบด้วยความเร็ว 20 เมตร/วินาที ขึ้นไปบนพื้นเอียง ดังรูป เมื่อไม่คิดแรงเสียดทาน วัตถุจะขึ้นไปได้สูงสุดจากพื้นกี่เมตร กำหนดให้โมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกลมเท่ากับ $\frac{2}{5}mr^2$

1. 5
2. 7
3. 14
4. 20
5. 28



$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}mR^2\right]\left(\frac{v}{R}\right)^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 = mgh$$

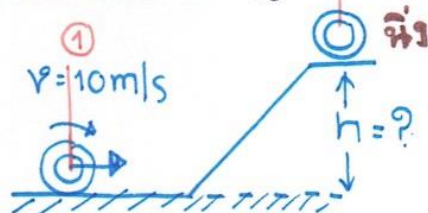
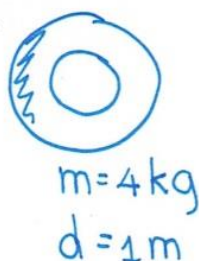
$$\frac{7}{10}v^2 = gh$$

$$\frac{7}{10}(20)^2 = 10h$$

$$h = 28 \text{ m}$$

$\rightarrow I = mR^2$

Ent 27 วงแหวนมวล 4 กิโลกรัม เส้นผ่านศูนย์กลาง 1 เมตร กลิ้งขึ้นพื้นเอียงโดยไม่ไถล ศูนย์กลางมวลมีความเร็วต้น 10 เมตรต่อวินาที จะขึ้นไปได้สูงสุดในแนวตั้งเป็นระยะทางกี่เมตร ($g = 10 \text{ m/s}^2$) (Ent'41 เต็มคำ)



$$E_1 + W_{1 \rightarrow 2} = E_2$$

แรงต้านไม่มี

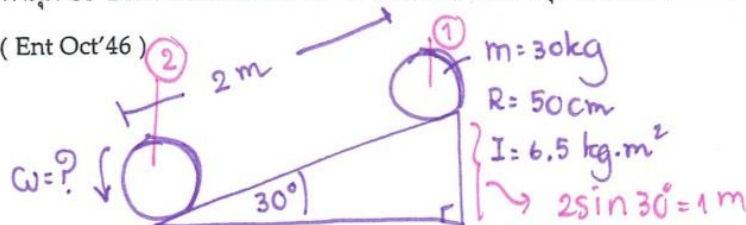
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}(4)10^2 + \frac{1}{2}[4(0.5)^2]\left(\frac{10}{0.5}\right)^2 = 4(10)h$$

$$h = 10 \text{ m}$$

Ent 28 แผ่นกลมแบนมวล 30 กิโลกรัม รัศมี 50 เซนติเมตร มีโมเมนต์ความเฉื่อยเท่ากับ 6.5 กิโลกรัม·เมตร² เมื่อปล่อยให้กลิ้งลงตามพื้นเอียงทำมุม 30 องศา เทียบกับแนวระดับ จงหาอัตราเร็วเชิงมุมของแผ่นกลมขณะกลิ้งลงได้ระยะ 2 เมตร ตามพื้นเอียง (Ent Oct'46)

1. $10\sqrt{\frac{1}{7}} \text{ rad/s}$
2. $10\sqrt{\frac{2}{7}} \text{ rad/s}$
3. $10\sqrt{\frac{3}{7}} \text{ rad/s}$
4. $10\sqrt{\frac{4}{7}} \text{ rad/s}$



$$E_1 = E_2$$

$$mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m(\omega R)^2$$

$$30(10)(1) = \frac{1}{2}(6.5)\omega^2 + \frac{1}{2}(30)\omega^2(0.5)^2$$

$$600 = 14\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{600}{14}} = 10\sqrt{\frac{3}{7}} \text{ rad/s}$$

Memo.