Sem2/58

เลขที่ในใบเซ็นต์ชื่อ

มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์

การสอบปลายภาค ประจำปีการศึกษา 1/2558
วันที่ 12 ธันวาคม 2558 เวลา 09.00-12.00 น.
วิชา 215-221 Engineering Mechanics II ห้อง A400, A401, S203, หัวหุ่น

คำสั่ง

ข้อสอบมีทั้งหมด 4 ข้อ จำนวน 12 หน้า ทำหมดทุกข้อในข้อสอบ
ห้ามนำเอกสารใด ๆ และ เครื่องคิดเลข เข้าห้องสอบ
อนุญาตใช้ดินสอ และใช้หน้าหลังของกระดาษ ได้
เขียนเลขที่นั่งสอบ (จากใบเซ็นชื่อ) ลงใน □ ที่หน้าปก (ถ้าไม่มีหัก 1 คะแนน)

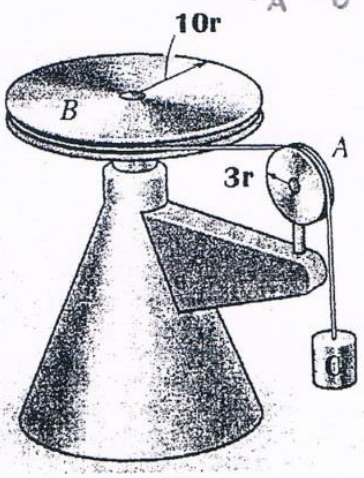
ผู้สอบ ชื่อ-สกุล.....รหัสนักศึกษา.....ผู้สอน.....

ผู้ออกข้อสอบ และ คะแนน

ข้อ	ผู้สอน	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้
1	ดร.จีระภา สุขแก้ว	20	.....
2	อ.ชลิดา หิรัญสุข	20	.....
3	ดร.สมชาย แซ่อึ้ง	20	.....
4	รศ.ไพโรจน์ คีรีรัตน์	20	.....
	รวม	80	.....

1.3 [9 คะแนน] วัตถุ C ถูกผูกด้วยปลายเชือก ซึ่งพาดผ่าน Disk A และ B ตามลำดับ ดังรูป หาก เริ่มต้น ระบบอยู่นิ่ง จากนั้นปล่อยวัตถุ C ให้เคลื่อนที่ลงอิสระ ที่ระยะขจัดลง d_C = 0.2 เมตร วัตถุ C มี อัตราเร็วอยู่ที่ 2 m/s จงตอบคำถามต่อไปนี้

$a_A = a_B$



กำหนดให้ r = 0.1 m

ก) [6 คะแนน] จงหา ความเร่งเชิงมุม ของ Disk A และ Disk B

$\alpha_A = \frac{a}{3r} = \frac{10}{3(0.1)}$

$\alpha_A = 33.3 \text{ rad/s}^2$ #

$\alpha_B = \frac{a}{10r} = \frac{10}{10(0.1)}$

$\alpha_B = 10 \text{ rad/s}^2$ #

ข) [1 คะแนน] จงหา ความเร็วเชิงมุม ของ Disk B เมื่อเวลาผ่านไป 2 s

$\omega = \omega_0 + \alpha t$

$\omega_B = 10(2) = 20 \text{ rad/s}$

ค) [2 คะแนน] จงหา การขจัดเชิงมุม ของ Disk B เมื่อเวลาผ่านไป 2 s

$v^2 = u^2 + 2as$

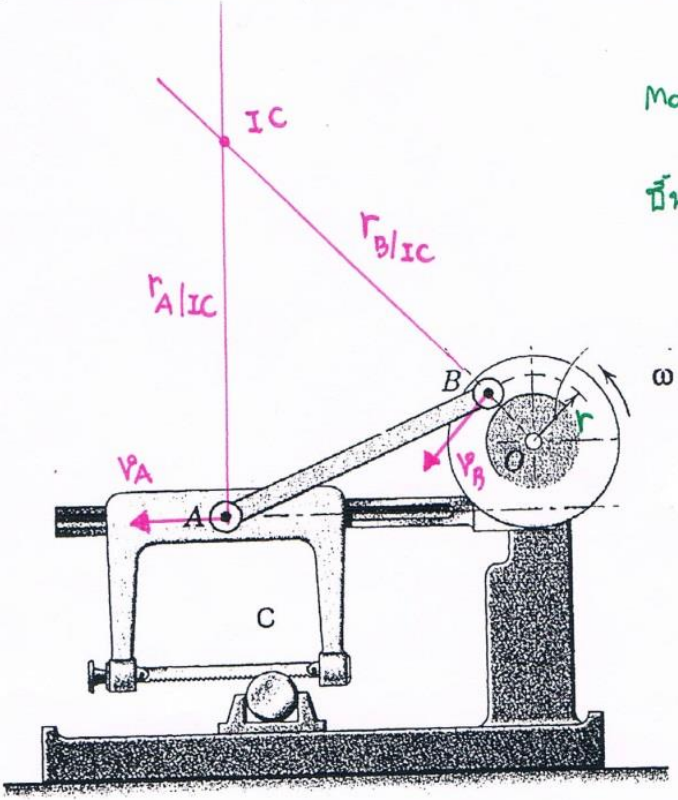
$2^2 = 0 + 2a(0.2) \rightarrow a = 10 \text{ m/s}^2$

$\omega_B^2 = \omega_{B0}^2 + 2\alpha\theta$

$20^2 = 2(10)\theta \rightarrow \theta = 20 \text{ rad}$ #

1.4 [6 คะแนน] ระบบ เลื่อยโลหะ ซึ่งประกอบด้วย ตัวเลื่อย AC ซึ่งถูกขับให้เคลื่อนที่โดย แท่ง Rod AB ที่ปลาย B ยึดติดอยู่บน Disk ซึ่งถูกขับด้วยมอเตอร์ ให้หมุนรอบจุดตรึง O ด้วย อัตราเร็วเชิงมุม ω_{OB} rad/s ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ดังรูป

- จงแสดงวิธีการ หาจุด IC ของแท่ง AB โดยเขียนลูกศร แสดง ทิศทาง ของ ความเร็ว ที่จุด A และ B ลงบนรูป
- กำหนดตัวแปรแสดงระยะต่างๆ และใช้สมการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของใบเลื่อย และ ω_{OB}



Motor : $v_B = \omega_{OB} r$

ปีก AB : $v_B = \omega_{AB} r_{B/IC}$

$\omega_{OB} r = \omega_{AB} r_{B/IC}$

$\omega_{AB} = \omega_{OB} \frac{r}{r_{B/IC}}$

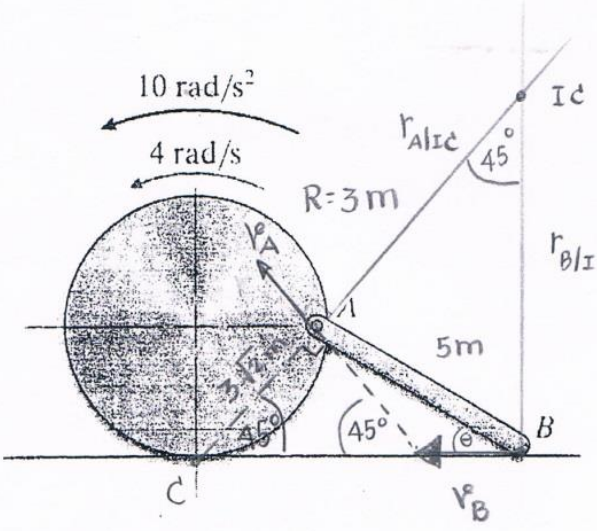
$v_A = \omega_{AB} r_{A/IC}$

$v_A = \omega_{OB} \frac{r}{r_{B/IC}} \cdot r_{A/IC}$ #

1.5 [*10 คะแนน*] วงล้อยักษ์ รัศมี 3 เมตร กลิ้งไปบนพื้นราบโดยไม่ไถล ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม 4 rad/s มีแท่ง Rod AB ซึ่งยาว 5 เมตร ถูกยึดติดด้วย pin support กับ วงล้อ ที่จุด A ดังรูป โดยที่ปลาย B ปล่อยสไลด์ ไปบนพื้นราบโดยอิสระ

♨ ณ ขณะนี้ จงหา <u>ความเร็วเชิงมุมของแท่ง AB</u> และ <u>ความเร็วของปลาย B</u>

Note : นักศึกษาสามารถ <u>เลือกใช้</u> <u>วิธี IC</u> หรือ <u>วิธี Relative Motion Analysis</u> ตามแต่ถนัด ในการแก้โจทย์ปัญหาข้อนี้



พิจารณาจุด C

$v_A = \omega r_{A/C}$

$= 4(3\sqrt{2})$

$v_A = 12\sqrt{2}$ m/s

$\frac{\sin\theta}{3\sqrt{2}} = \frac{\sin 45^\circ}{5}$

$\sin\theta = \frac{3}{5}$

$\overline{BC} = R + 5\cos\theta = 3 + 5\left(\frac{4}{5}\right) = 7$ m

$r_{B/IC} = 7$ m , $r_{A/IC} = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ m

$v_A = \omega_{AB} r_{A/IC} \rightsquigarrow 12\sqrt{2} = \omega_{AB}(4\sqrt{2})$

$\boxed{\omega_{AB} = 3 \text{ rad/s}^2}$ #

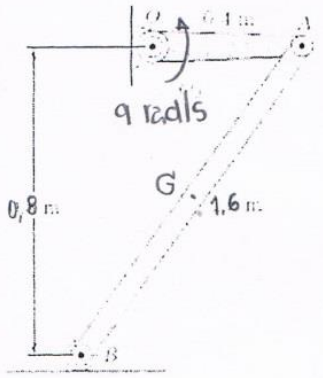
$v_B = \omega_{AB} r_{B/IC} \rightsquigarrow v_B = 3(7)$

$\boxed{v_B = 21 \text{ m/s}}$ #

ข้อ 2. (20 คะแนน) Force Mass and Acceleration of Rigid Body ออกข้อสอบโดย อ.สมชาย แซ่อึ้ง

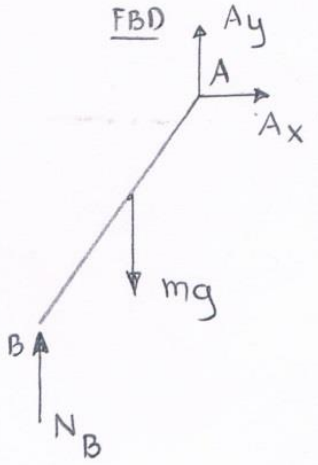
2.1 ณ ตำแหน่งดังรูป แขน OA อยู่ในแนวราบ และกำลังหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุม 9 rad/s ทิศตามรูป จงหาแรงที่พื้นกระทำต่อลูกกลิ้ง ที่ตำแหน่ง B

<u>กำหนดให้</u> คาน AB มีมวล 10 kg และมีรัศมีไจเรชั่นรอบจุดศูนย์กลางมวล 0.2 m และพื้นลื่นไร้แรงเสียดทาน

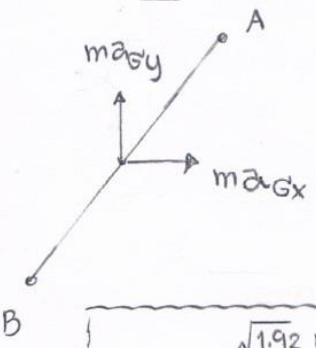


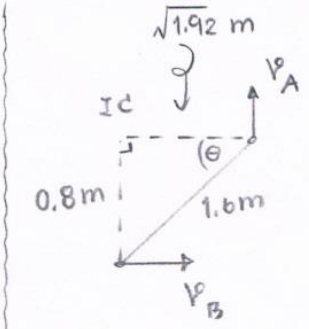
$I_{AB} = mk^2 = 10(0.2)^2 = 0.4 \ kg.m^2$

FBD



KD





$v_A = \omega_{OA} r_{OA} = 9(0.4)$

$= 3.6 \ m/s$

$v_A = \omega_{AB} r_{A/IC}$

$3.6 = \omega_{AB} \sqrt{1.92}$

$\omega_{AB} = 2.60 \ rad/s$

rod OA :

$a_{An} = \omega^2 r = 9^2(0.4) = 32.4 \ m/s^2$

rod AB : $\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{GA} \times \vec{r}_{G/A} - \omega_{GA}^2 \vec{r}_{G/A}$

$a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = -32.4\vec{i} + 0 - 2.6^2[-0.8\cos\theta\,\vec{i} - 0.8\sin\theta\,\vec{j}]$

$\vec{i}$: $a_{Gx} = -32.4 + 2.6^2(0.8)\frac{\sqrt{1.92}}{1.6} = -27.7 \ m/s^2$

$\vec{j}$: $a_{Gy} = +2.6^2(0.8)\frac{0.8}{1.6} = 2.704 \ m/s^2$

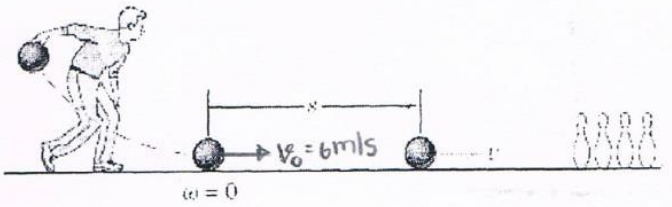
$\circlearrowleft (+) \quad (\Sigma M_A)_{FBD} = (\Sigma M_A)_{KD}$

$N_B\sqrt{1.92} - mg\frac{\sqrt{1.92}}{2} = ma_{Gy}\frac{\sqrt{1.92}}{2} - ma_{Gx}(0.4)$

$N_B - \frac{10(10)}{2} = \frac{10(2.704)}{2} - 10(-27.7)\frac{0.4}{\sqrt{1.92}}$

$$\boxed{N_B = 143.5 \ N}$$

2.1 ลูกโบวลิ่งซึ่งมวล 1.5 kg มีรัศมี 15 cm และมีรัศมีไจเรชั่น 5 cm ถูกโยนออกไปโดยไม่มีการหมุนด้วยความเร็วเชิงเส้นขนาด 6 m/s และไถลไปตามพื้นที่มีสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ 0.15 จงหาระยะ ที่ลูกโบว์ลิ่งเคลื่อนที่ไปได้จนถึงจุดที่เริ่มกลิ้งไปโดยไม่ไถล

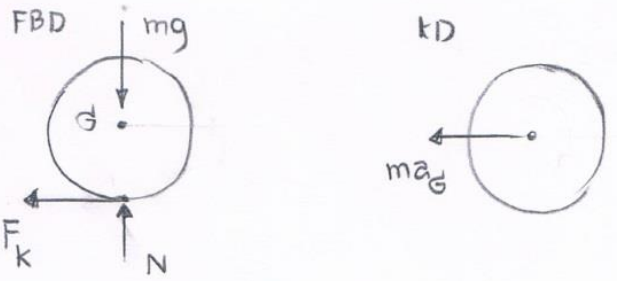


$I_G = mk^2$

$= 1.5(0.05)^2$

$= 3.75 \times 10^{-3}$ kg.m^2

slipping



$\Sigma F_x = ma_{Gx}$; $F_k = ma_G$

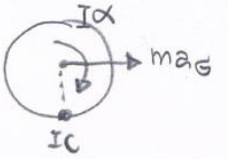
$\mu_k N = ma_G$

$0.15[1.5 \times 10] = ma_G$

$a_G = 1.5$ m/s^2

No slipping $v^2 = v_o^2 + 2as$

$= 6^2 + 2(1.5)s$



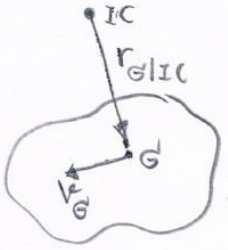
$(+\circlearrowright) \Sigma M_G = I\alpha$

$F_k r = 3.75 \times 10^{-3}\left(\frac{1.5}{0.15}\right)$

$F_k = 0.25$ N

ข้อ 3. (20 คะแนน) Work and Energy ออกข้อสอบโดย อ.ชลิดา หิรัญสุข

3.1 (2 คะแนน)



ในรูปของ m, I_G, ω และ $r_{G/IC}$

ง่ายแต่ไม่ให้ใช้

พลังงานจลน์ $T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$

$T = \frac{1}{2} I_{IC} \omega^2$

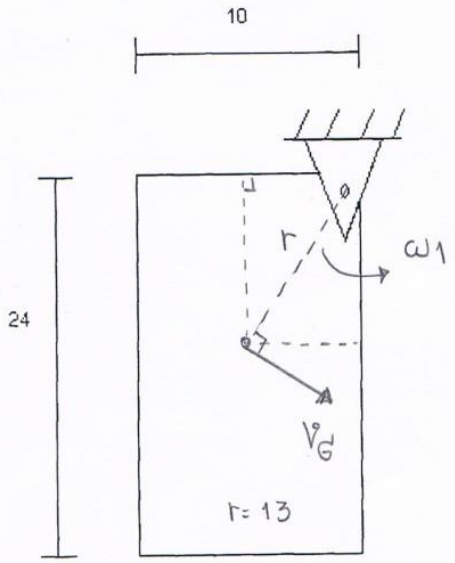
$= \frac{1}{2} m [\omega r_{G/IC}]^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$

$= \frac{1}{2} [m r_{G/IC}^2 + I_G] \omega^2$ #

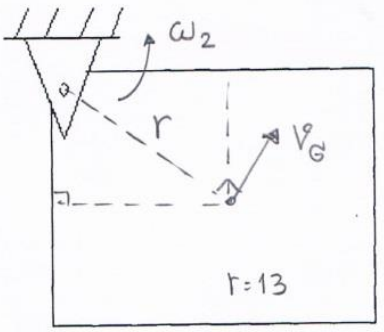
3.2 แผ่น plate ซึ่งมี มวล m และโมเมนต์ความเฉื่อย I_G เคลื่อนที่จากตำแหน่ง 1 (ω_1) ไปยังตำแหน่ง 2 (ω_2)

จงระบุค่าพลังงานจลน์ของแผ่น plate ที่แต่ละตำแหน่งในรูป (ตำแหน่ง 1 และ 2) ในเทอมของ m, I_G และ ω (4 คะเนน)

ตำแหน่งที่ 1



ตำแหน่งที่ 2

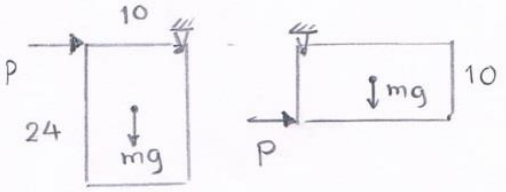


$T_1 = \frac{1}{2} [m r^2 + I_G] \omega^2$

$= \frac{1}{2} [169m + I_G] \omega_1^2$ #

$T_2 = \frac{1}{2} [169m + I_G] \omega_2^2$ #

3.3 จากข้อ 3.2 ถ้าแรงในแนวราบ P กระทำที่มุมซ้ายบน ของแผ่น plate ในตำแหน่งที่ 1 และยังคงอยู่ในแนวราบจนแผ่น plate เคลื่อนไปอยู่ในตำแหน่งที่ 2 จงคำนวณหางานทั้งหมดของระบบ (4 คะแนน)



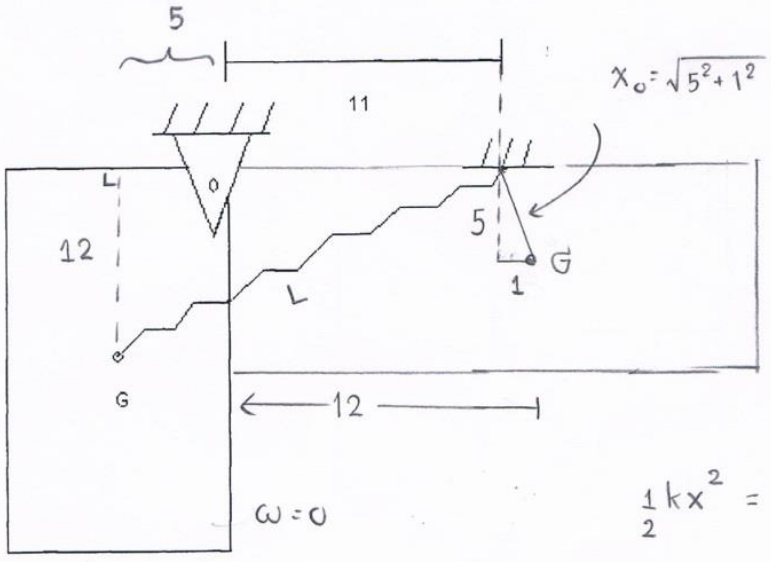
$$U_T = P(10) + mg(-7)$$
$$= 10P - 7mg$$

3.4 จากหัวข้อ 3.3 ถ้าระบบเริ่มเคลื่อนที่จากหยุดนิ่ง จงหาความเร็วเชิงมุม ω ของแผ่น plate ที่ตำแหน่งที่ 2 (5 คะแนน)

$$T_1 + V_1 + \Sigma U_{1\to 2} = T_2 + V_2$$
$$0 + 10P = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + 7mg$$
$$10P = \frac{1}{2}\left[169m + I_G\right]\omega^2 + 7mg$$

$$\omega = \sqrt{\frac{20P - 14mg}{169m + I_G}}$$

3.5 ถ้าเปลี่ยนแรง P เป็นแรงสปริง ดังในรูป โดยสปริงอยู่ในภาวะสมดุลเมื่ออยู่ในตำแหน่งที่ 2 จงหาค่า k ของสปริง ที่ทำให้ ω ของแผ่น plate ในตำแหน่งที่ 2 ยังคงมีค่าเท่ากับ ω ในข้อ 3.4 (5 คะแนน)



$$x_0 = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

$$L = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$$

$$x = L - x_0 = 20 - \sqrt{26}$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\left[169m + I_G\right]\omega^2 + 7mg$$

$$k = \frac{(169m + I_G)\omega^2 + 14mg}{(20 - \sqrt{26})^2}$$

#

relative-motion

ข้อ 4. (20 คะแนน) Rigid Body: Kinematics (Acceleration), Impulse and Momentum ออกข้อสอบโดย อ.ไพโรจน์ คีรีรัตน์

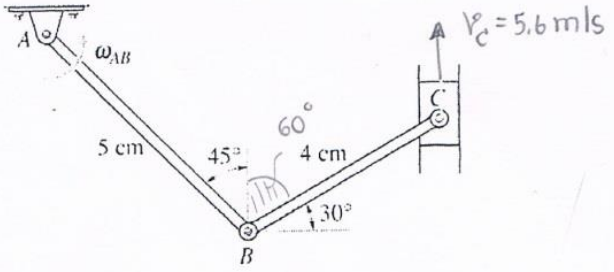
4.1 แขน BC ต่ออยู่กับแขน AB และ ตัวเลื่อน ดังในรูป ถ้าตัวเลื่อนเคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร็วคงที่ 5.6 m/s

<u>กำหนดให้</u> $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0.7$, $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = 0.9$, และ $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = 0.5$

สมการความเร่งสัมพัทธ์ $\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ (1)

$\hookrightarrow \omega^2 \vec{r}$

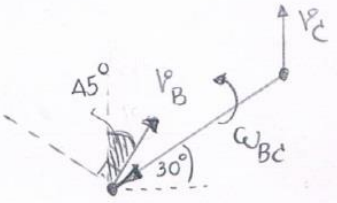
(ก) จงเสก็ต acceleration diagram ของสมการ (1) โดยเริ่มจากจุด P (2 คะแนน)



P +

จงตอบคำถาม และ แสดงวิธีทำ

(ก) $\vec{\omega}_{BC} =$ $-100\,\vec{k}$ ..... (2 คะแนน)



แสดงวิธีทำ

$\vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{B/C}$

$V_B \sin 45^\circ \,\vec{i} + V_B \cos 45 \,\vec{j} = 5.6\,\vec{i} + (\omega_{BC}\,\vec{k}) \times [-0.04 \sin 45^\circ \,\vec{i} - 0.04 \sin 45^\circ \,\vec{j}\,]$

$= 5.6\,\vec{i} - 0.028\,\omega_{BC}\,\vec{j} + 0.028\,\omega_{BC}\,\vec{i}$

$\vec{i}$: $0.7 V_B = 5.6 + 0.028\,\omega_{BC}$

$V_B = 8 + 0.04\,\omega_{BC}$ — ①

$\vec{j}$: $0.7 V_B = -0.028\,\omega_{BC}$

$V_B = -0.04\,\omega_{BC}$ — ②

$\therefore \omega_{BC} = -100$ rad/s

(ข) $\vec{\omega}_{BA} =$ $80\,\vec{k}$ ..... (2 คะแนน)

แสดงวิธีทำ

จากข้อ (ก) ; $V_B = 4$ m/s

rod AB : $V_B = \omega_{AB} r$

$\omega_{AB} = \frac{4}{0.05} = 80$ rad/s

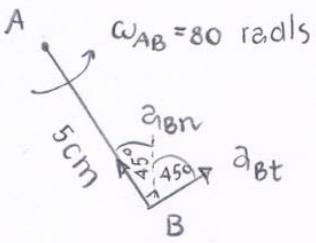
(ค) $\vec{r}_{B/C} =$ $-2.8\vec{i} - 2.8\vec{j}$ cm ..... (2 คะแนน)

(ง) จงหาความเร่งเชิงมุม ของแขน AB (6 คะแนน)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C^{\,0} + \vec{\alpha}_{BC} \times \vec{r}_{B/C} - \omega_{BC}^2 \vec{r}_{B/C}$$

$$\vec{a}_B = (\alpha_{BC}\vec{k}) \times \frac{-2.8}{100}(\vec{i}+\vec{j}) - 100^2(\vec{i}+\vec{j})$$

$$\vec{a}_B = -0.028\alpha_{BC}\vec{j} + 0.028\alpha_{BC}\vec{i} - 100^2\vec{i} - 100^2\vec{j} \quad -(1)$$



$$a_{Bt} = \alpha_{AB} r = 0.05\alpha_{AB} \text{ m/s}^2$$

$$a_{Bn} = \omega_{AB}^2 r = 6400(0.05) = 320 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_B = (0.05\alpha_{AB} - 320)\sin 45^\circ \vec{i} + (0.05\alpha_{AB} + 320)\cos 45^\circ \vec{j} \quad -(2)$$

① = ② ;

$\vec{i}$: $(0.05\alpha_{AB} - 320)0.7 = 0.028\alpha_{BC} - 100^2$

$0.035\alpha_{AB} - 224 = 0.028\alpha_{BC} - 10000 \quad -*$

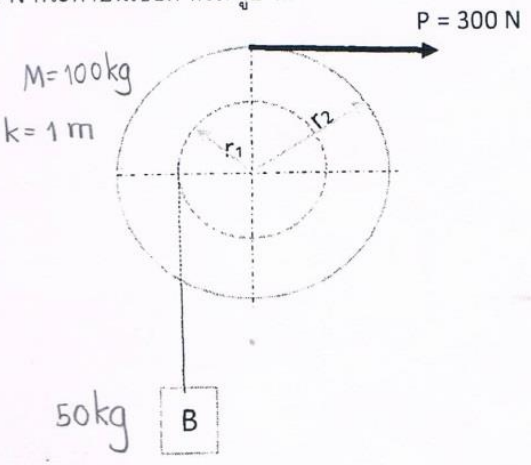
$\vec{j}$: $(0.05\alpha_{AB} + 320)0.7 = -0.028\alpha_{BC} - 100^2$

$0.035\alpha_{AB} + 224 = -0.028\alpha_{BC} - 10000 \quad -**$

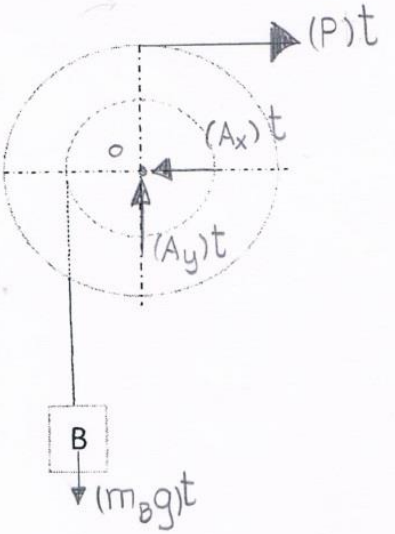
(*)+(**) ; $0.07\alpha_{AB} = -20{,}000$

$$\alpha_{AB} = -2.86 \times 10^5 \text{ rad/s}^2$$

4.2 ล้อ (r_1 = 0.5 m, r_2 = 1.0 m) มีมวล M = 100 kg มีรัศมีไจเรชั่นเท่ากับ 1.0 m ถ้าบล็อก B มีมวล m = 50 kg และมีแรง P = 300 N กระทำบนเชือก ดังในรูป ก.



รูป ก.



รูป ข. Impulse Diagram

จงตอบคำถาม ต่อไปนี้

(ก) อิมพัลส์เชิงมุม (angular impulse) หมายถึง ผลคูณโมเมนต์กับค่าเวลาที่กระทำต่อระบบ (2 คะแนน)

(ข) จงเสก็ตเวกเตอร์ของ impulse บนรูป ข. Impulse Diagram (2 คะแนน)

(ค) ในข้อ (ข) แรงที่ไม่ทำให้เกิด angular impulse คือ A_x และ A_y

เพราะว่า แรงผ่านจุดหมุน (2 คะแนน)

(ง) ถ้าในรูป ระบบเคลื่อนที่จากสภาพนิ่ง (ที่ t = 0 s) เป็นเวลา 5 วินาที

จงคำนวณหา ความเร็วของบล็อก B เมื่อ t = 5 s ไม่คิดมวลของเชือก และกำหนดให้ g = 10 m/s^2 (6 คะแนน)

ล้อ : $H_{O2} = H_{O1} + \Sigma Mt$ $\quad I_G = mk^2 = 100(1)^2 = 100\ kg\cdot m^2$

$I_G\omega_2 = I_G\omega_1^{\,0} + (Pr_2 - Tr_1)t$

$100\dfrac{v_2}{r_1} = [300(1) - T(0.5)]5$ or

$40v_2 = 300 - 0.5T \rightsquigarrow 80v_2 = 600 - T$ —① $\quad (\circlearrowright \Sigma H_{O2} = \Sigma H_{O1} + \Sigma Mt$

มวล : $mv_2 = mv_1 + \Sigma Ft$

$50v_2 = 0 + (T - 500)(5)$

$10v_2 = T - 500$ —②

① + ②, $\quad 90v_2 = 100$

$v_2 = 1.11$ m/s #