ข้อ 1. (6 คะแนน) กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ $\rightarrow y'' - x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

$$(1-x^2)\,y'' - 2x\,y' + 2y = 0$$

โดยการใช้อนุกรมกำลังรอบจุดสามัญ $x_0 = 0$ จงแสดงวิธีการหาความสัมพันธ์เวียนบังเกิด <u>โดยไม่ต้องหาผลเฉลย</u>

step1 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \cancel{x_0}^{\,0})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

step2 $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

step3 $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n = 0$

-2 $+2$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n = 0$

$n=0,1$ $n=1$ $n=0,1$

step 4 $\underbrace{\left[\, 2a_2 + 6a_3 x - 2\cancel{a_1} x + 2a_0 + 2\cancel{a_1} x \,\right]}_{(2a_2 + 2a_0) + 6a_3 x} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n - 2n a_n + 2a_n \right] x^n = 0$

step 5 $a_2 = -a_0$

$a_3 = 0$

$(n+2)(n+1) a_{n+2} = (n(n-1) + 2n - 2) a_n$

$a_{n+2} = \dfrac{(n^2+n-2)}{(n+2)(n+1)} a_n$

$= \dfrac{(\cancel{n+2})(n-1)}{(\cancel{n+2})(n+1)} a_n$

$\therefore\ a_{n+2} = \dfrac{(n-1)}{(n+1)} a_n$, $n \geq 2$

$a_{n+2} = \dfrac{(n-1)}{(n+1)}\ a_n$

สำหรับ $n =$ 2, 3, 4, 5, ...

ข้อ 2. (5 คะแนน) จากการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สมการหนึ่งโดยการใช้อนุกรมกำลังรอบจุดเอกฐานปกติทำให้เราได้

$$r(3r-1)a_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r-1)(3n+3r)a_{n+1} + (n+r)a_n - a_n\right]x^{n+r+1} = 0$$

จากสมการข้างบน

- สมการดัชนีคือ ...... $r(3r-1) = 0$ ......
- รากของสมการดัชนีคือ $r_1 =$ ...... 0 ......, $r_2 =$ ...... $\frac{1}{3}$ ......(ให้ $r_1 < r_2$)
- ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดที่ขึ้นกับ r_1 คือ $(n-1)(3n)a_{n+1} + na_n - a_n = 0$

  $a_{n+1} =$ ...... $\frac{-1}{3n}$ ...... a_n, $n =$ ...... $1, 2, 3, \ldots$ ......
- ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดที่ขึ้นกับ r_2 คือ $(n+\frac{1}{3}-1)(3n+1)a_{n+1} + (n+\frac{1}{3})a_n - a_n = 0$

  $a_{n+1} =$ ...... $\frac{-1}{(3n+1)}$ ...... a_n, $n =$ ...... $1, 2, 3, \ldots$ ......

ข้อ 3. (12 คะแนน) กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์

$$\underbrace{2x}_{p(x)}\,y'' - \underbrace{(1-x)}_{q(x)}\,y' + \underbrace{y}_{r(x)} = 0 \quad \rightarrow \quad 2xy'' - y' + xy' + y = 0$$

3.1 จงแสดงว่าจุด $x_0 = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติ (2 คะแนน)

↳ regular singular point

$$\lim_{x\to 0}(x-0)\left[\frac{-(1-x)}{2x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(x-1)}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{exist}$$

$$\lim_{x\to 0}(x-0)^2\left[\frac{1}{2x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2} = 0 \quad \text{exist}$$

$\therefore$ $x_0 = 0$ is regular singular point.

3.2 จงแสดงวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์รอบจุดเอกฐานปกติ $x_0 = 0$ (10 คะแนน)

Step 1 $\quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$

Step 2 $\quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$

Step 3

$$\sum_{\substack{n=0\\-1}}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1}_{+1} - \sum_{\substack{n=0\\-1}}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}_{+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty} 2(n+r+1)(n+r) a_{n+1} x^{n+r} - \sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1) a_{n+1} x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$n=-1 \qquad n=-1$

Step 4

$$\underbrace{\left[2r(r-1) a_0 x^{r-1} - r a_0 x^{r-1} \right]}_{[2r(r-1)-r]\, a_0 x^{r-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[2(n+r+1)(n+r) a_{n+1} - (n+r+1) a_{n+1} + (n+r) a_n + a_n \right] x^{n+r} = 0$$

ดึงตัวร่วม $(n+r+1)a_{n+1}$

Step 5 $\quad 2r^2 - 2r - r = 0 \quad$ (indicial eq^n)

$2r^2 - 3r = 0$

$r = 0, \frac{3}{2} \quad$ (root of indicial eq^n)

$[2(n+r)-1]\cancel{(n+r+1)} a_{n+1} + \cancel{(n+r+1)} a_n = 0$

$$a_{n+1} = \frac{-a_n}{(2n+2r-1)} \quad , \quad n \geq 0$$

$\boxed{r=0}$ $\quad a_{n+1} = \frac{-a_n}{(2n-1)} \quad , n \geq 0$

$n=0 : \quad a_1 = \frac{-a_0}{-1} = a_0$

$n=1 : \quad a_2 = \frac{-a_1}{1} = \frac{-a_0}{1}$

$n=2 : \quad a_3 = \frac{-a_2}{3} = +\frac{a_0}{1.3}$

$n=3 : \quad a_4 = \frac{-a_3}{5} = \frac{-a_0}{1.3.5}$

ส่มเรียง

$\vdots$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+0}$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

$$= a_0 + a_0 x - \frac{a_0}{1} x^2 + \frac{a_0}{1.3} x^3 - \frac{a_0}{1.3.5} x^4 + \ldots$$

$$= a_0 \left(1 + x - x^2 + \frac{x^3}{1.3} - \frac{x^4}{1.3.5} + \ldots \right)$$

Note

$\mathcal{C}_1 = c_1 a_0$

$\mathcal{C}_2 = c_2 a_0$

$\boxed{r = \frac{3}{2}}$ $\quad a_{n+1} = \frac{-a_n}{2n+2} = \frac{-a_n}{2(n+1)} \quad , n \geq 0$

$n=0 : \quad a_1 = -\frac{a_0}{2}$

$n=1 : \quad a_2 = \frac{-a_1}{2.2} = +\frac{a_0}{2^2.2}$

$n=2 : \quad a_3 = \frac{-a_2}{2.3} = -\frac{a_0}{2^3.2.3}$

$n=3 : \quad a_4 = \frac{-a_3}{2.4} = +\frac{a_0}{2^4.2.3.4}$

$\vdots$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{3}{2}}$$

$$= x^{\frac{3}{2}} \left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \right]$$

$$= a_0 x^{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2.2} - \frac{x^3}{2^3.2.3} + \frac{x^4}{2^4.2.3.4} + \ldots \right]$$

Step 6

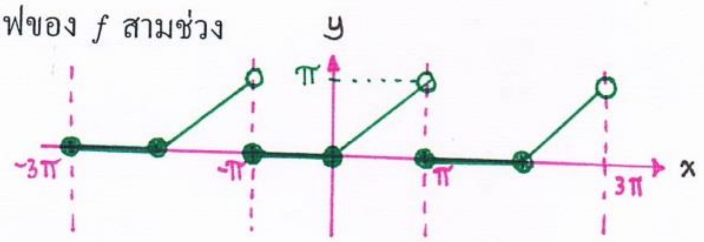
$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = \mathcal{C}_1 \left(1 + x - x^2 + \frac{x^3}{1.3} - \frac{x^4}{1.3.5} + \ldots \right) + \mathcal{C}_2 x^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2.2} - \frac{x^3}{2^3.2.3} + \frac{x^4}{2^4.2.3.4} + \ldots \right)$$

ข้อ 4. (12 คะแนน) กำหนดให้

$\Rightarrow T = 2\pi \,,\; L = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0; \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases} \quad \text{และ} \quad f(x+2\pi) = f(x) \quad \text{ทุกค่า } x$$

4.1 จงเขียนกราฟของ f สามช่วง (1 คะแนน)



4.2 ที่จุด $x = \pi$ อนุกรมฟูเรียร์ลู่เข้าสู่ค่า $\dfrac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \dfrac{\pi + 0}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ (1 คะแนน)

4.3 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของ f (8 คะแนน)

- $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \dfrac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \cancel{0\,dx}^{\,0} + \int_0^{\pi} x\,dx\right] = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}\right] = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\pi^2}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

- $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \dfrac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \cancel{0\,dx}^{\,0} + \int_0^{\pi} x\cos nx\,dx\right]$ ไม่ balance คิดปกติ

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(0 + \frac{\cos n\pi}{n^2}\right) - \left(0 + \frac{\cos 0}{n^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

u	dv
x	$\cos nx$
1	$\dfrac{\sin nx}{n}$ $+$
0	$-\dfrac{\cos nx}{n^2}$ $-$

- $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \dfrac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \cancel{0\,dx}^{\,0} + \int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right]$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n} + 0\right) - (0+0)\right]$$

$$= \frac{-(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

u	dv
x	$\sin nx$
1	$-\dfrac{\cos nx}{n}$ $+$
0	$-\dfrac{\sin nx}{n^2}$ $-$

- อนุกรมฟูเรียร์ของ f คือ $f(x) \sim \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right]\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$

4.4 จงใช้อนุกรมฟูเรียร์ที่ได้ในข้อ 4.3 เพื่อแสดงว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ (2 คะแนน)

แทน $x=0$: $\dfrac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n-1]\cancel{\cos 0}^{\,1}$

$0 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{-2}{1^2}+0+\dfrac{(-2)}{3^2}+0+\dfrac{(-2)}{5^2}+0+\dots\right]$

$0 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{\pi}\underbrace{\left[\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dots\right]}_{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}}$ $\rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{4}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8} = \text{RHS}$

#

ข้อ 5. (9 คะแนน) ให้ f เป็นฟังก์ชันคู่ที่มีคาบ 2 และอนุกรมฟูเรียร์ของ f คือ

$T=2$, $L=1$

$$f(x)=\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{3^n}\right)\cos(n\pi x)$$

$\hookrightarrow a_n = \dfrac{(-1)^n-1}{3^n}$, $b_n=0$

จงหาค่าของ

5.1 $a_0 =$ $\dfrac{3}{4}\times 2 = \dfrac{3}{2}$ (1 คะแนน)

5.2 $a_4 =$ $\dfrac{(-1)^4-1}{3^4} = 0$ (1 คะแนน)

5.3 $b_3 =$ 0 (1 คะแนน)

5.4 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx =$ $La_0 = 1\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$ # (1 คะแนน)

5.5 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\sin(5\pi x)\,dx =$ $Lb_n = 0$ # (1 คะแนน)

5.6 $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\cos(\pi x)dx =$ $\dfrac{La_n}{2} = \dfrac{La_1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(-1)^1-1}{3^1}\right) = -\dfrac{1}{3}$ # (1.5 คะแนน)

$\downarrow$ $n\pi=\pi$, $n=1$

5.7 $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\sin^2(2\pi x)\,dx =$ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\left[\frac{1-\cos(2\pi x)}{2}\right]dx$ (2.5 คะแนน)

$2\pi = n\pi \rightarrow n=2$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\cos(2\pi x)\,dx$

$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$

$\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$= \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{La_0}{2}\right] - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{La_n}{2}\right]$ (a_2) $= \dfrac{1}{4}(1)\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{4}\cancel{(1)\left[\dfrac{(-1)^2-1}{3^2}\right]}^{\,0} = \dfrac{3}{8}$

#

ข้อ 6. (9 คะแนน) จงระบุว่าฟังก์ชันต่อไปนี้มีคาบเท่าใด เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่หรือไม่ใช่ทั้งสองอย่าง (โดยขีดเส้นใต้ตัวที่เลือก) และจงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน โดยเขียนปริพันธ์จำกัดเขตเพื่อหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ (ไม่ต้องคำนวณค่า)

6.1 $f(x) = 2x$ และ $f(x+6) = f(x)$ ทุกค่า x

- f มีคาบ ....6.... เป็นฟังก์ชัน คู่ / <u>คี่</u> / ไม่ใช่ทั้งสองอย่าง และอนุกรมฟูเรียร์ของ f คือ

$L=3$ $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)x$

โดยที่

- $a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} \overset{\text{odd}}{f(x)}\,dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} 2x\,dx$
- $a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} 2x\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)x\,dx$
- $b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} 2x\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)x\,dx$

6.2 $f(x) = 1 + x^3$ และ $f(x+\pi) = f(x)$ ทุกค่า x

- f มีคาบ ....π.... เป็นฟังก์ชัน คู่ / คี่ / <u>ไม่ใช่ทั้งสองอย่าง</u> และอนุกรมฟูเรียร์ของ f คือ

$L=\frac{\pi}{2}$ $\quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(2nx) + b_n\sin(2nx)\right]$

โดยที่

- $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+x^3)\,dx$
- $a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+x^3)\cos(2nx)\,dx$
- $b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+x^3)\sin(2nx)\,dx$

6.3 $f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 0; \\ -2, & 0 < x < 1. \end{cases}$ และ $f(x+2) = f(x)$ ทุกค่า x

- f มีคาบ ....2.... เป็นฟังก์ชัน คู่ / <u>คี่</u> / ไม่ใช่ทั้งสองอย่าง และอนุกรมฟูเรียร์ของ f คือ

$L=1$ $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\pi x)$

โดยที่

- $a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 2\,dx + \int_{0}^{1} -2\,dx$
- $a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx = \int_{-1}^{0} 2\cos(n\pi x)\,dx + \int_{0}^{1} -2\cos(n\pi x)\,dx$
- $b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx = \int_{-1}^{0} 2\sin(n\pi x)\,dx + \int_{0}^{1} -2\sin(n\pi x)\,dx$